

Розділ II. Постійний електричний струм та контактні явища в металах і напівпровідниках

Тема 1. Електричний струм та його характеристики: сила та густина струму

Фізичні явища

- **Електричний струм (далі: струм)** – це явище упорядкованого руху електричних зарядів.

Фізичні поняття

- **Постійний електричний струм** – це струм, сила струму якого не залежить від часу.

- **Конвекційний струм** – це струм, утворений упорядкованим рухом заряджених макротіл (наприклад, рух заряджених крапель дощу).

- **Струм поляризації** – короткочасний струм у діелектриках внаслідок зміщення зв'язаних електричних зарядів в електричному полі.

- **Дрейфова швидкість** – це швидкість, з якою носії заряду рухається паралельно до ліній електричного поля.

Фізичні величини

- **Сила струму** – це відношення заряду, який пройшов через поперечний переріз провідника за певний час до часу його проходження (позначення I).

$$I \equiv \frac{dq}{dt}.$$

- **Густина струму** – це величина

$$\vec{j} \equiv \frac{dI}{dS} \vec{n},$$

dS – елемент площі поперечного перерізу провідника, \vec{n} – одиничний вектор нормалі до цієї елементарної площі, dI – зміна сили струму при зміні площі на dS .

Задачі

(72) Покажемо, що сила струму – це потік вектора густини струму.

За означенням густина струму

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{n}.$$

Помножимо це рівняння на $dS\vec{n}$. Дістанемо

$$\vec{j} dS \vec{n} = dI \vec{n} \vec{n}.$$

Врахувавши, що $\vec{n} \vec{n} = 1$, матимемо

$$dI = \vec{j} \vec{n} dS,$$

звідки

$$I = \int_S \vec{j} \vec{n} dS = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

де $\vec{n} dS \equiv d\vec{S}$.

Остання формула вказує на те, що сила струму – це потік вектора густини струму.

(73) Покажемо, що сила постійного струму є однакова в усіх послідовно з'єднаних провідниках.

Згідно з означенням постійного струму

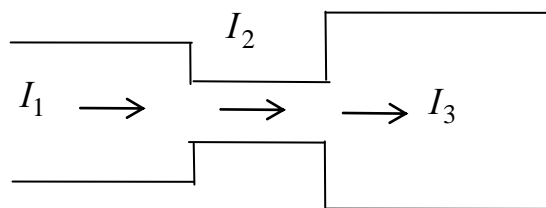
$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

Помножимо й поділимо ліву та праву частини цієї рівності на елемент довжини провідника dl .

$$\frac{dI}{dt} \frac{dl}{dl} = 0.$$

Враховуючи те, що $\frac{dl}{dt} = v$, дістанемо

$$v \frac{dI}{dl} = 0.$$



Мал. 53

Оскільки дрейфова швидкість v не дорівнює нулеві, то

$$\frac{dI}{dl} = 0,$$

це означає, що сила струму не залежить від координати l , тобто всюди є однаковою уздовж усіх провідників.

Остання рівність, очевидно, може бути написана і так:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n,$$

де I_n – сила струму в n -ому провіднику (мал. 53).

Будь-яке з двох останніх рівнянь називають *рівнянням неперервності постійного струму*.

(74) На основі теореми Остроградського–Гауса виведемо рівняння неперервності струму.

На основі математичної теореми Остроградського–Гауса для вектора \vec{j}

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Але потік вектора густини струму, який є в лівій частині цієї рівності – це сила струму (задача 72), тому маємо

$$I = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Застосувавши до лівої частини цього рівняння послідовно означення сили струму та поверхневої густини заряду, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

чи

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

звідки

$$\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} \vec{j}.$$

Враховуючи, що густина заряду ρ може залежати не тільки від часу, а й від координат, замінимо похідну на частинну похідну. Тоді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}.$$

Це рівняння називають рівнянням неперервності струму.

(75) Доведемо, що провідник зі струмом не є еквіпотенціальним.

Припустимо, що провідник зі струмом є еквіпотенціальним, тобто $\varphi = \text{const}$. Тоді спрямувавши вісь Ox у напрямі струму (у напрямі руху позитивних зарядів), маємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = E_x = 0,$$

тобто складова електричного поля в напрямі руху зарядів дорівнює нулеві. Згадавши, що електричне поле виявляє себе за дією на заряд, приходимо до суперечності: електричного поля немає, а дія на заряд є, що означає хибність нашого припущення і тому потенціал провідника зі струмом не може бути всюди однаковий, а напруженість поля не може дорівнювати нулеві.

(76) Покажемо, що в провіднику зі струмом носії заряду дрейфують зі сталою швидкістю.

Будемо вважати, що носій струму із зарядом q рухається під впливом електричного поля в середовищі з коефіцієнтом опору α .

Напишемо основне рівняння динаміки для заряду q , який рухається під дією сили електричного поля qE та сили опору αv , де v – дрейфова швидкість заряду.

$$m \frac{dv}{dt} = qE - \alpha v.$$

Зведемо це диференціальне рівняння до рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{dv}{\frac{q}{m}E - \frac{\alpha}{m}v} = dt.$$

Проінтегрувавши це рівняння, отримаємо

$$-\frac{m}{\alpha} \ln \left(\frac{q}{m}E - \frac{\alpha}{m}v \right) = t + C,$$

де C – стала інтегрування, яку знайдемо з умови, що в початковий момент часу швидкість заряду дорівнювала нулеві, тобто за умови $t = 0$, $v = 0$, що після підстановки в останнє рівняння дає результат

$$C = -\frac{m}{\alpha} \ln \left(\frac{q}{m}E \right).$$

Враховуючи цей вираз для C , та зробивши алгебраїчні перетворення у розв'язку диференціального рівняння, дістанемо

$$v = \frac{qE}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right). \quad (7)$$

З цієї залежності $v(t)$ бачимо, що через деякий час після початку руху величина $e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ буде значно менша за одиницю і швидкість досягне практично сталого значення, а саме

$$v = \frac{qE}{\alpha}.$$

(77) Покажемо, що густина струму залежить від концентрації та дрейфової швидкості носіїв струму і встановимо цю залежність.

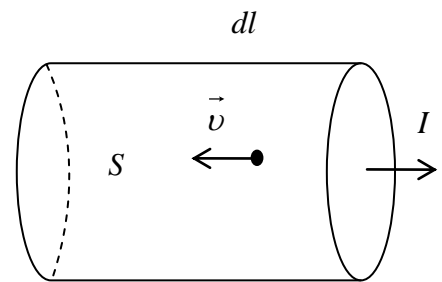
Для цього розглянемо елемент провідника довжиною dl і площею поперечного перерізу S , у якому тече струм I (мал. 54).

Застосовуючи послідовно означення густини струму, сили струму, концентрації та швидкості, дістанемо

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\frac{dq}{dt} \right) = e \frac{d}{dS} \left(\frac{dN}{dt} \right) = \\ = e \frac{d}{dS} \left(\frac{ndV}{dt} \right) = e \frac{d}{dS} \left(\frac{nSdl}{dt} \right) = e \frac{d}{dS} (nSv).$$

Враховуючи, що всі величини під знаком похідної можуть залежати від S , знайдемо цю похідну як похідну від добутку. Дістанемо

$$j = e \left(nv + vS \frac{dn}{dS} + nS \frac{dv}{dS} \right).$$



Мал. 54

У випадку коли n і v сталі, тобто не залежать від S маємо, що $\frac{dn}{dS} = 0$ і $\frac{dv}{dS} = 0$ і тоді

$$j = env.$$

Враховуючи, що вектор \vec{v} спрямований туди ж, куди і \vec{n} , дістанемо

$$\vec{j} = env\vec{n} = en\vec{v}.$$

(78) Покажемо, що рівняння неперервності постійного струму може бути подане у вигляді $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Рівняння неперервності постійного струму

$$\frac{dI}{dl} = 0$$

поділимо на площу поперечного перерізу провідника S і врахуємо, що $Sdl = dV$. Тоді

$$\frac{dI}{dV} = 0,$$

або врахувавши означення сили струму

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{dq}{dt} \right) = 0,$$

звідки, врахувавши, що $\frac{dq}{dV}$ – це об'ємна густина заряду ρ .

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Взявши до уваги рівняння неперервності струму $\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} \vec{j}$, дістанемо

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

(79) Обчислимо силу струму, який створює електрон в атомі водню.

Вважаючи, що електрон обертається зі сталою кутовою швидкістю, можемо написати згідно з означенням сили струму

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi},$$

де e – заряд електрона, T – час протягом якого проходить заряд e , тобто період обертання електрона, який пов'язаний з циклічною частотою ω співвідношенням $T = 2\pi/\omega$. Своєю чергою, ω знайдемо з умови рівності електричної сили притягання між електроном і ядром (протоном) і відцентровою силою інерції.

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m\omega^2 R,$$

де m – маса електрона, R – радіус його орбіти. Підставивши ω з цієї рівності в рівняння для I , дістанемо:

$$I = \frac{e^2}{4\sqrt{\pi^2 \epsilon_0 m R^3}}.$$

Знаючи радіус орбіти електрона в атомі водню $R = 53$ пм, знайдемо числове значення сили струму $I = 6,9 \cdot 10^{-9}$ А.

Тема 2. Закон Ома для ділянки кола. Опір провідника

Фізичні величини

• **Електричний опір провідника** – це величина, обернена до коефіцієнта пропорційності між силою струму в провіднику і напругою між його кінцями (позначення R).

$$R = \frac{U}{I}.$$

• **Питомий опір провідника** – це коефіцієнт пропорційності між опором провідника та відношенням його довжини до площі поперечного перерізу (позначення ρ).

$$\rho = R \frac{S}{l}.$$

• **Питома електропровідність** – це фізична величина, обернена до питомого опору.

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho}. \quad (3)$$

• **Температурний коефіцієнт опору** – це відношення відносної зміни опору провідника до зміни температури, яка спричинила цю зміну опору (позначення α).

$$\alpha = \frac{1}{dT} \frac{d\rho}{\rho_0}.$$

• **Рухливість носія заряду** – це відношення його дрейфової швидкості до напруженості електричного поля, яка спричинила цей дрейф (позначення μ).

$$\mu = \frac{v}{E}.$$

Постулати

➤ **Сила струму в провіднику прямо пропорційна до різниці потенціалів (напруги) на кінцях цього провідника.**

$$I = \frac{1}{R} U,$$

де величина R називається *електричним опором провідника*. Ця рівність називається *законом Ома для ділянки кола*.

Закон Ома, водночас, є означенням електричного опору провідника.

➤ **Опір провідника прямо пропорційний до його довжини і обернено пропорційний до його площі поперечного перерізу.**

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – коефіцієнт пропорційності, який називається *питомим опором провідника*.

Цей емпіричний закон водночас є означенням питомого опору.

Фізичні системи і прилади

- **Додатковий опір** – це резистор, який приєднують послідовно до вольтметра з метою розширення меж його вимірювань.
- **Шунт** – це резистор, який приєднують паралельно до амперметра з метою розширення межі його вимірювань.

Задачі

(80) Представимо закон Ома в диференціальній формі.

Справді закон Ома у формі $I = U/R$ можна назвати інтегральною формою закону Ома, оскільки в неї входять інтегральні величини – сила струму та опір, а інтегральними вони є тому, що стосуються всього провідника, а не окремої його точки.

Представимо закон Ома через диференціальні величини – густину струму, напруженість електричного поля та питомий опір.

Для цього застосуємо послідовно означення густини струму, закон Ома для ділянки кола, означення питомого опору та формулу зв'язку між напруженістю електричного поля та напругою. Дістанемо для величини вектора \vec{j}

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\frac{U}{R} \right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{US}{\rho l} \right) = \frac{U}{\rho l} \frac{dS}{dS} = \frac{1}{\rho} E = \sigma E.$$

Для вектора \vec{j}

$$\vec{j} = \sigma E \vec{n},$$

де \vec{n} – одиничний вектор нормалі до поперечного перерізу, але оскільки \vec{n} і \vec{E} співнаправлені, то $E\vec{n} = \vec{E}$, тому

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Ця формула і є диференціальною формою закону Ома.

(81) Установимо, як питома провідність залежить від параметрів носіїв заряду: їхньої рухливості та концентрації.

Із закону Ома в диференціальній формі та залежності густини струму від концентрації та дрейфової швидкості ($j = env$), а також означення рухливості маємо

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{env}{E} = en\mu.$$

(82) Установимо залежність питомого опору провідника від температури за умови залежного та незалежного від температури коефіцієнта опору.

З означення температурного коефіцієнта опору маємо

$$d\rho = \alpha(T) \rho_0 dT,$$

де символ $\alpha(T)$ підкреслює, що коефіцієнт опору залежить від температури.

З останнього рівняння

$$\rho = \rho_0 \int \alpha(T) dT.$$

Наголосимо на тому, що інтеграл в останній рівності є невизначеним, тому проінтегрувавши ми отримаємо функцію $\rho(T)$.

Якщо α не залежить від температури, що насправді спостерігається у металах, то він виноситься за знак інтеграла, і тоді

$$\rho = \alpha \rho_0 \int dT,$$

звідки

$$\rho = \alpha \rho_0 T + C.$$

Сталу C знаходимо з умови $T = T_0$, $\rho = \rho_0$, підставленої в останнє рівняння. Дістаємо

$$C = \rho_0 - \alpha \rho_0 T_0.$$

Тепер, підставляючи це значення замість C , дістанемо

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)],$$

або позначивши $T - T_0 = \Delta T$,

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T).$$

Отже, за незалежного від температури коефіцієнта опору питомий опір залежить від температури лінійно.

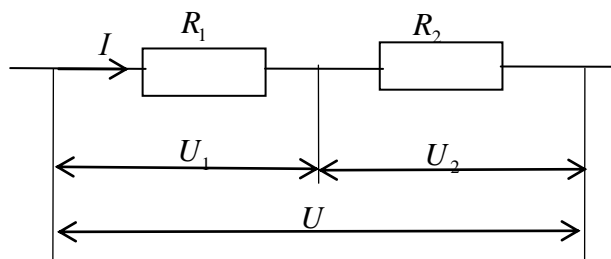
Очевидно, що оскільки опір є пропорційний до питомого опору, то для опору отримаємо таку саму рівність.

(83) На основі рівняння неперервності струму та закону Ома для ділянки кола доведемо, що за послідовного з'єднання опорів, опір ділянки кола дорівнює сумі окремих опорів.

На основі рівняння неперервності струму, струм який тече через опори R_1 і R_2 , однаковий (мал. 55).

Крім того, напруга на ділянці кола дорівнює сумі напруг на опорах

$$U = U_1 + U_2.$$



Мал. 55

За законом Ома для ділянки кола

$$U = IR, U_1 = IR_1, U_2 = IR_2,$$

тому останнє рівняння запишемо так:

$$IR = IR_1 + IR_2,$$

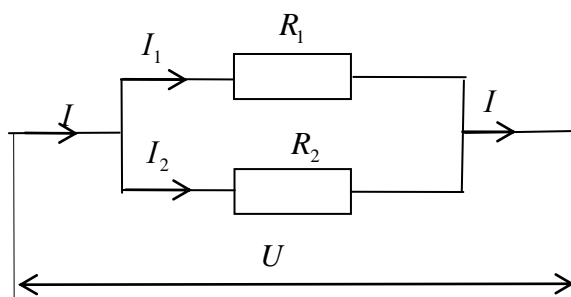
звідки

$$R = R_1 + R_2.$$

(84) Доведемо, що за паралельного з'єднання опорів обернений опір ділянки кола дорівнює сумі обернених опорів.

На основі рівняння неперервності струму (мал. 56)

$$I = I_1 + I_2.$$



Мал. 56

За законом Ома для ділянки кола

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2},$$

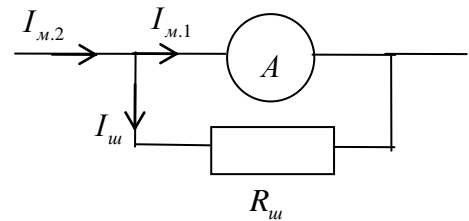
звідки

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

(85) Обчислимо опір шунта, який слід приєднати до амперметра, щоб розширити межу його вимірювань у n разів.

Нехай без шунта амперметр вимірює максимальну силу струму I_{m1} . Але нам слід виміряти силу струму в n разів більшу $I_{m2} = nI_{m1}$. Тому паралельно до амперметра включимо шунт – резистор, опір якого $R_{ш}$ (мал. 57), причому його опір має бути таким, щоб струм через амперметр не перевищував максимально допустимий для нього I_{m1} . Згідно з рівнянням неперервності струму

$$I_{m2} = I_{m1} + I_{ш}.$$



Мал. 57

Поділивши це рівняння на I_{m1} , дістанемо:

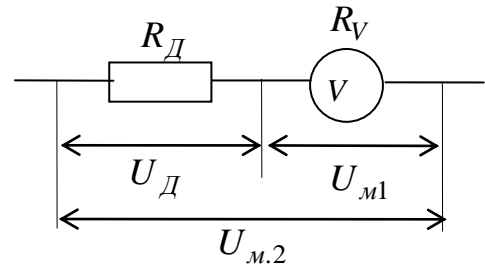
$$n = 1 + \frac{I_{ш}}{I_{m1}}.$$

Підставивши сюди згідно з законом Ома $I_{ш} = U/R_{ш}$ та $I_{m1} = U/R_A$, де R_A – опір амперметра, отримаємо після скорочення на U

$$R_{ш} = \frac{R_A}{n-1}.$$

(86) **Обчислимо додатковий опір, який слід приєднати до вольтметра, щоб розширити межу його вимірювань у n разів.**

Нехай без додаткового опору вольтметр вимірює максимальну напругу $U_{м1}$. Але нам слід виміряти напругу в n разів більшу $U_{м2} = nU_{м1}$. Тому послідовно до вольтметра приєднаємо резистор, який називають додатковим опором (мал. 58). З малюнка видно, що напруга, яку слід виміряти



Мал. 58

$$U_{м2} = U_D + U_{м1}.$$

Поділивши це рівняння на $U_{м1}$, дістанемо

$$n = \frac{U_D}{U_{м1}} + 1,$$

звідки за законом Ома для ділянки кола

$$n = \frac{IR_D}{IR_V} + 1,$$

і

$$R_D = R_V(n-1).$$

(87) **Покажемо, що електропровідність є одним з явищ перенесення.**

Для цього всі рівняння, які описують явища перенесення, приведемо до однакової форми.

1. Відомо, що явище внутрішнього тертя описується формулою Ньютона

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S,$$

де F – сила внутрішнього тертя між двома шарами рідини чи газу площею S , dv/dx – градієнт швидкості впоперек потоку, η – коефіцієнт внутрішнього тертя.

Застосувавши основне рівняння динаміки $F = dp/dt$, де p – імпульс, представимо формулу Ньютона так:

$$\frac{dp}{Sdt} = -\eta \frac{dv}{dx},$$

що означає на словах, що густина потоку імпульсу пропорційна до градієнта швидкості.

2. Напишемо відомий закон Фіка для дифузії

$$dM = -D \frac{d\rho}{dx} Sdt,$$

де dM – маса яка переноситься за час dt через площу S , $\frac{d\rho}{dx}$ – градієнт густини, D – коефіцієнт дифузії і представимо його у формі, подібній до форми формули Ньютона, а саме

$$\frac{dM}{Sdt} = -D \frac{d\rho}{dx},$$

що означає, що густина потоку маси пропорційна до градієнта густини.

3. Закон Фур'є для теплопровідності напишемо у формі

$$\frac{dQ}{Sdt} = -K \frac{dT}{dx},$$

яка вказує на те, що густина потоку теплоти пропорційна до градієнта температури.

4. Зведемо закон Ома до такої ж форми, як і три попередні. З диференціальної форми цього закону та означень густини струму і сили струму маємо

$$\begin{aligned}j &= \sigma E, \\ \frac{I}{S} &= \sigma E, \\ \frac{dq}{Sdt} &= \sigma E.\end{aligned}$$

Враховуючи, що $E = -d\varphi/dx$, дістанемо остаточно

$$\frac{dq}{Sdt} = -\sigma \frac{d\varphi}{dx},$$

з чого робимо висновок, що густина потоку заряду (густина струму) пропорційна до градієнта потенціалу, а електропровідність є явищем перенесення заряду.

Тепер усі чотири явища перенесення можемо записати в таблицю.

Явище	Назва закону	Формула	Що переноситься
Внутрішнє тертя	Формула Ньютона	$\frac{dp}{Sdt} = -\eta \frac{dv}{dx},$	Імпульс
Дифузія	Закон Фіка	$\frac{dM}{Sdt} = -D \frac{d\rho}{dx},$	Маса
Теплопровідність	Закон Фур'є	$\frac{dQ}{Sdt} = -K \frac{dT}{dx},$	Кількість теплоти
Електропровідність	Закон Ома в диференціальній формі	$\frac{dq}{Sdt} = -\sigma \frac{d\varphi}{dx}.$	Заряд

Тема 3. Електрорушійна сила (ЕРС). Закон Ома для ділянки кола з ЕРС. Закон Ома для повного кола

Фізичні величини

• **Електрорушійна сила** – це відношення роботи сторонньої сили, яку вона виконує перемістивши заряд вздовж замкненого контура, до величини цього заряду (позначення \mathcal{E}).

$$\mathcal{E} = \frac{A_c}{q}. \quad (1)$$

Задачі

(88) Доведемо, що стороння сила не може бути потенціальною.

Дійсно, якщо б стороння сила була потенціальною, то робота цієї сили на замкненій траєкторії дорівнювала б нулеві, тоді, б і електрорушійна сила згідно, з її означенням (1) дорівнювала б нулеві. Отже

$$A_C = \oint \vec{F}_C d\vec{r} = q \oint \vec{E}_C d\vec{r} \neq 0.$$

Крім того бачимо, що ЕРС може бути представлена так

$$\mathcal{E} = \frac{A_C}{q} = \oint_L \vec{E}_C d\vec{r}.$$

(89) Установимо закон Ома для ділянки кола з електрорушійною силою та для замкненого кола з електрорушійною силою.

Роботу сторонньої сили вздовж замкненого контура представимо як суму робіт на окремих ділянках кола (мал. 59).

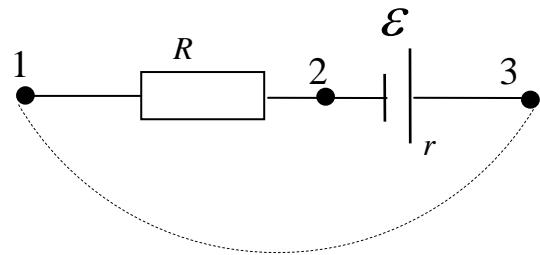
$$A_C = A_{12} + A_{23} + A_{31}$$

і поділимо це рівняння на заряд q . Дістанемо

$$\frac{A_C}{q} = \frac{A_{12}}{q} + \frac{A_{23}}{q} + \frac{A_{31}}{q}.$$

Згідно з означенням ЕРС та потенціалу останнє рівняння набере вигляду:

$$\mathcal{E} = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31},$$



Мал. 59

а на основі закону Ома для ділянки кола у випадку ділянки кола

$$\mathcal{E} = IR + Ir + \varphi_{31},$$

та у випадку замкненого кола, тобто коли $\varphi_{31} = 0$

$$\mathcal{E} = IR + Ir.$$

Останні дві рівності можна подати і так:

$$I = \frac{\mathcal{E} + \Delta\varphi}{R + r},$$

де $\Delta\varphi = \varphi_{13} = -\varphi_{31}$, та

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Дві останні рівності виражають закон Ома для ділянки кола з ЕРС та замкненого кола з ЕРС відповідно.

Закон Ома для замкненого кола з ЕРС ще називають законом Ома для повного кола.

(90) Установимо вираз для ЕРС, яка виникає при обертанні металевого диска.

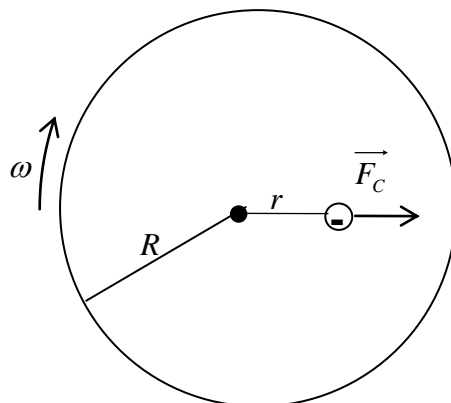
Сторонньою силою в цьому випадку є відцентрова сила інерції, яка діє на електрони (мал. 60)

$$F_C = m\omega^2 r,$$

де m – маса електрона, ω – кутова швидкість диска, r – відстань від електрона до центра диска.

Напруженість поля сторонньої сили

$$E_C = \frac{F}{e} = \frac{m\omega^2 r}{e}$$



Мал. 60

і згідно з означенням ЕРС

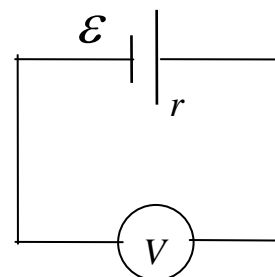
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_C d\vec{r} = \int_0^R \frac{m\omega^2 r}{e} dr = \frac{m\omega^2}{e} \int_0^R r dr = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}.$$

Наприклад, за умови $R = 10$ см, $\omega = 1000$ рад/с, отримаємо, що $\mathcal{E} = 3 \cdot 10^{-8}$ В, тобто таке джерело ЕРС не є ефективним.

(91) Обчислимо відносну похибку, яку ми допускаємо, вимірюючи ЕРС джерела постійного струму вольтметром.

Дійсно, вольтметр вимірює не ЕРС, а напругу на ділянці кола, а в цьому випадку, оскільки в колі є лише вольтметр, напругу на самому вольтметрі (мал. 61), яка за законом Ома для ділянки кола

$$U = IR_B,$$



Мал. 61

де R_B – опір вольтметра.

Цю напругу ми вважаємо за ЕРС, проте реальна ЕРС – це величина, отримана з закону Ома для повного кола

$$\mathcal{E} = I(R_B + r)$$

де r – внутрішній опір джерела.

Таким чином, відносна похибка буде:

$$\delta = \frac{|\mathcal{E} - U|}{\mathcal{E}} \cdot 100\% = \frac{IR_B + Ir - IR_B}{I(R_B + r)} \cdot 100\% = \frac{r}{R_B + r} \cdot 100\%.$$

Як бачимо, ця похибка буде менша, що більший опір вольтметра.

Тема 4. Правила Кірхгофа

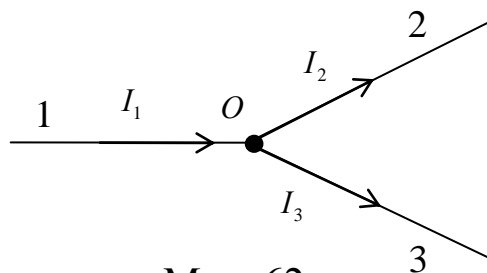
Задачі

(92) На основі рівняння неперервності струму встановимо перше правило Кірхгофа, а саме, що арифметична сума струмів, які входять у вузол, дорівнює арифметичній сумі струмів, які з нього виходять.

Дійсно, перше правило Кірхгофа випливає з рівняння неперервності струму. Нехай в точці O струм I_1 розгалужується на I_2 та I_3 (мал. 62). Провідники 2 і 3 можна розглядати як один провідник, послідовно приєднаний до провідника 1. Тоді згідно з рівнянням неперервності струму

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Очевидно, якщо у вузол входить n струмів, а виходить з нього m струмів, то



Мал. 62

$$\sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^m I_i.$$

(93) На основі закону Ома для ділянки кола з ЕРС установе́мо друге правило Кірхгофа, а саме, що в будь-якому контурі, виділеному з розгалуженого кола, алгебраїчна сума напруг дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, які є в цьому контурі.

Вибираємо довільно в розгалуженому колі напрями струмів в усіх вітках та напрями обходу контурів (мал. 63). Виділимо з цього кола один замкнений контур, наприклад, $ABCA$ і напишемо для кожної його ділянки рівняння згідно з законом Ома для ділянки кола з ЕРС

$$I_1 R_1 = \varphi_B - \varphi_A - \mathcal{E}_1,$$

$$I_1 R_2 = \varphi_C - \varphi_B + \mathcal{E}_2,$$

$$-I_3 R_3 = \varphi_A - \varphi_C.$$

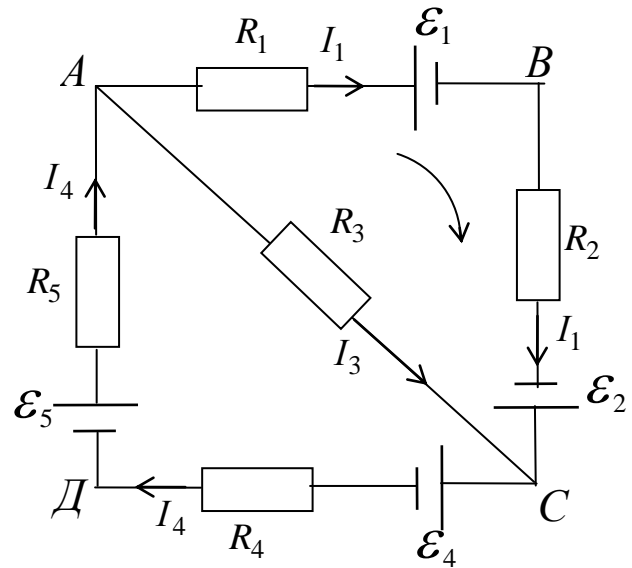
Після додавання цих рівностей дістанемо

$$I_1 R_1 + I_1 R_2 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1,$$

що означає, що алгебраїчна сума напруг на опорах в цьому контурі дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, які є в ньому.

Очевидно, що за будь-якої кількості опорів та джерел ЕРС

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_m.$$



Мал. 63

(94) На основі правил Кірхгофа знайдемо опір R_x за допомогою так званої місткової схеми (мал. 64), якщо відомі опори R_1 , R_2 та R_3 підібрані так, що сила струму у вітці $ВД$ дорівнює нулеві.

Перед тим як застосувати правила Кірхгофа, зробимо наступні дії:

1. Виберемо напрями струмів в усіх вітках кола.

Очевидно, що в колі є лише три струми: струм I , який тече через джерело струму \mathcal{E} , струм I_1 , який тече через опори R_1 і R_x , та струм I_2 , який тече через опори R_2 та R_3 (в точках B і D насправді розгалужень немає, бо у вітці $ВД$ струм дорівнює нулеві).

2. Виберемо напрями обходу контурів.

3. Виберемо $n-1$ вузол до яких застосуємо перше правило Кірхгофа та $n-1$ контур до яких застосуємо друге правило Кірхгофа.

Тепер можемо застосувати правила Кірхгофа, зокрема, друге правило до контурів ABD та BCD . Отже, для контура ABD

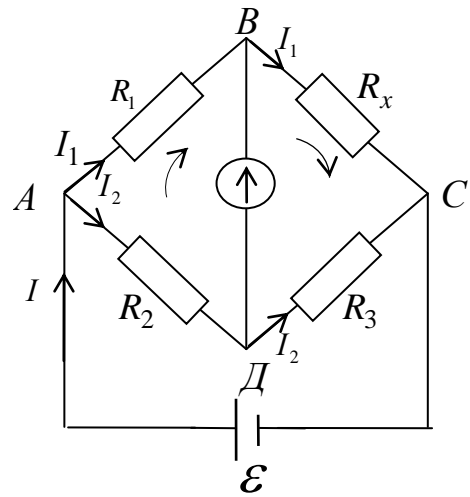
$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

і для контура BCD

$$I_1 R_x - I_2 R_3 = 0.$$

З цих двох рівнянь знаходимо:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_3.$$



Мал. 64

Цей метод вимірювання опорів називається *методом містка Вістона*.

(95) Визначимо ЕРС джерела струму компенсаційним методом.

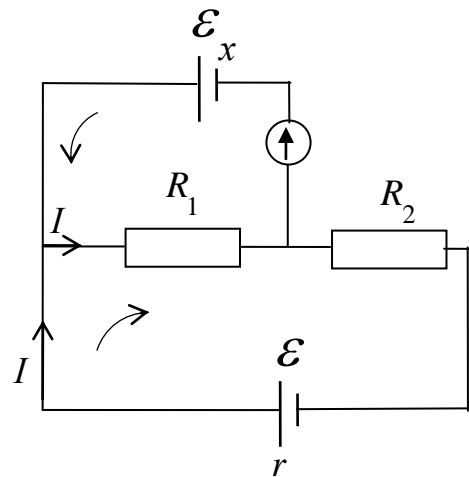
Підберемо опори R_1 і R_2 такими, щоб струм у верхній вітці дорівнював нулеві (на малюнку 65 гальванометр показує нуль).

За другим правилом Кірхгофа для нижнього контура

$$I(R_1 + R_2 + r) = \mathcal{E}_1,$$

а для верхнього контура

$$IR_1 + 0r_x = \mathcal{E}_x.$$



Мал. 65

З цих двох рівнянь знаходимо

$$\mathcal{E}_x = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + r} \mathcal{E}.$$

Як бачимо, результат вимірювань не залежить від внутрішнього опору r_x вимірюваного джерела. Крім того, за достатньо великих опорів R_1 і R_2 внутрішній опір еталонного джерела r практично можна не враховувати, бо тоді $r \ll R_1 + R_2$.

Тема 5. Робота і потужність струму

Фізичні поняття

- **Коефіцієнт корисної дії споживача струму** – це відношення корисної роботи, виконаної струмом в приладі, до всієї виконаної роботи струму в цьому ж приладі (позначення η).

$$\eta = \frac{A_k}{A_g}. \quad (1)$$

• **Коротке замикання** – це явище сильного нагрівання джерела ЕРС при його навантаженні споживачем з опором значно меншим за його внутрішній опір.

Задачі

(96) Установимо вираз для роботи, яку виконує постійний струм та вираз його потужності.

Оскільки фізична величина «робота» опирається на таку фізичну величину як сила, то слід з'ясувати, про роботу якої сили піде мова, коли ми говоримо про роботу струму. Очевидно, що це є стороння сила, яка діє на заряди з боку електричного поля, тому виходимо з того, що за переміщення заряду dq від точки до точки це поле виконує роботу, яка згідно з означенням напруги та сили струму

$$dA = U dq = UI dt, \quad (2)$$

звідки

$$A = \int_0^t UI dt,$$

або застосувавши закон Ома

$$A = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt = \int_0^t I^2 R dt.$$

Очевидно, що для постійного струму сталі величини винесемо за знак інтеграла і отримаємо

$$A = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt.$$

Для потужності з виразу (2) та означення потужності

$$P = \frac{dA}{dt} = UI$$

і на основі закону Ома

$$P = \frac{U^2}{R} = I^2R.$$

(97) Установимо закон Джоуля-Ленца в інтегральній та диференціальній формах.

Ми встановили, що робота яку виконує постійний струм (насправді роботу виконує електричне поле сторонніх сил, або ще точніше: стороння сила),

$$A = I^2Rt.$$

Згідно з першим законом термодинаміки $Q = \Delta U + A$ за зміни внутрішньої енергії $\Delta U = 0$ (що буде завжди, коли провідник перебуває у середовищі), ця робота буде дорівнювати кількості теплоти, яку віддасть провідник, тобто

$$A = Q = I^2Rt.$$

Ця формула виражає закон Джоуля-Ленца.

Переведемо цей закон в диференціальну форму. Для цього до останнього виразу застосуємо послідовно означення густини струму, закон Ома в диференціальній формі та означення питомого опору. Дістанемо

$$Q = I^2 R t = j^2 S^2 R t = \frac{E^2}{\rho^2} S^2 R t = \frac{E^2}{\rho^2} S^2 \rho \frac{l}{S} t = \frac{E^2}{\rho} V t = \sigma E^2 V t.$$

Поділивши останнє рівняння на Vt , маємо

$$\frac{Q}{Vt} = \sigma E^2.$$

Величина $\frac{Q}{t}$ – це теплова потужність, тому величину $\frac{Q}{Vt}$ можемо назвати *об'ємною густиною теплової потужності* і позначити буквою w . Тоді

$$w = \sigma E^2,$$

або врахувавши, що згідно із законом Ома в диференціальній формі $\sigma E = j$

$$w = jE$$

і оскільки вектори \vec{j} і \vec{E} співнаправлені

$$w = \vec{j} \vec{E}.$$

Це і є закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

(98) Знайдемо вираз для ККД джерела постійного струму.

Згідно з означенням ЕРС та сили струму, а також за законом Ома для повного кола, робота виконана джерелом струму

$$A_{\text{с}} = \mathcal{E}q = \mathcal{E}It = \frac{\mathcal{E}^2 t}{R + r}.$$

Корисна робота – це робота, виконана струмом на споживачі:

$$A_K = I^2 R t = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R t.$$

Тепер залишилось обчислити ККД згідно з його означенням:

$$\eta = \frac{A_K}{A_B} = \frac{R}{R + r}.$$

З цієї формули видно, що за умови $r \ll R$, яка до речі, найчастіше реалізується, ККД приладу може бути близьким до 100 %. Якщо ж навпаки $r \gg R$, то ККД близький до нуля, що означає згідно з означенням ККД (1), що $A_K \ll A_B$, тобто вся робота виконується у самому джерелі струму і згідно з законом Джоуля-Ленца в ньому виділяється вся теплота, яка призводить до сильного перегріву джерела, що, очевидно, є небезпечним для самого джерела. Такого режиму роботи, який називається коротким замиканням, допускати не можна, тобто, по-простому, не можна приєднувати до полюсів джерела струму споживачі з дуже малим опором.

(99) Визначимо кількість теплоти, яка виділиться в провіднику за час τ , протягом якого струм у ньому рівномірно зростає від нуля до величини I_m . Обчислимо також середню потужність за цей час.

Очевидно, що йдеться не про постійний струм. Проте впродовж нескінченно малого проміжку часу dt його можна вважати постійним. Тоді кількість теплоти виділена за час dt згідно з законом Джоуля-Ленца

$$dQ = I^2 R dt$$

звідки

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt = R \int_0^{\tau} I^2 dt.$$

Залишилося встановити часову залежність сили струму $I(t)$. Оскільки струм зростає рівномірно, то ця залежність лінійна

$$I(t) = at + b.$$

Сталі a і b знайдемо з умов: $t = 0$, $I = 0$ та $t = \tau$, $I = I_m$. Підставивши ці умови в останнє рівняння, знаходимо, що $b = 0$ та $a = \frac{I_m}{\tau}$. Отже,

$$I(t) = \frac{I_m}{\tau} t.$$

Підставивши цю залежність у підінтегральну функцію, знаходимо

$$Q = R \int_0^{\tau} \left(\frac{I_m}{\tau} t \right)^2 dt = \frac{I_m^2 R}{\tau^2} \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{1}{3} I_m^2 R \tau.$$

Середнє значення потужності знайдемо за формулою середнього значення функції

$$\bar{P} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} P(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} I^2(t) R dt = \frac{R}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{I_m^2}{\tau^2} t^2 dt = \frac{R I_m^2}{\tau^3} \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{1}{3} R I_m^2.$$

Тема 6. Класична теорія електропровідності металів

Фізичні поняття

- **Електронний газ** – це ідеальний газ, роль молекул якого відіграють вільні електрони.

Постулати

➤ Метал складається з йонів, які, коливаючись біля своїх вузлів утворюють кристалічну ґратку та вільних електронів, які хаотично рухаються у кристалі.

➤ Сукупність вільних електронів у металі трактується як ідеальний газ.

➤ Під час зіткнення електрона з вузлом кристалічної ґратки електрон цілком передає йому свою енергію дрейфового руху.

Задачі

(100) За допомогою мисленнево проведеного експерименту Толмена і Стюарта підтвердимо наявність у металі вільних електронів та визначимо їхній питомий заряд.

Основний зміст досліду полягає в тому, що за різкого гальмування соленоїда, що швидко обертається, в ньому, виникає струм, причиною якого є рух електронів за інерцією.

Застосуємо до електрона, що внаслідок гальмування соленоїда рухається за інерцією, основне рівняння динаміки в неінерційних системах відліку, яке, як відомо, має вигляд

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m\vec{a}_0,$$

де $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – сума зовнішніх сил, які діють на тіло (електрон), \vec{a}_0 – прискорення, з яким рухається сама система відліку, (у нашому випадку це є соленоїд) та $m\vec{a}_0 = \vec{F}_{in.}$ – сила інерції, яка діє на тіло (електрон) в цій системі відліку.

Оскільки, крім сили інерції інші сили на електрон не діють, то в проекції на вісь, яка збігається з напрямом лінійної швидкості соленоїда, маємо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{in}.$$

Ця сила інерції і є тією сторонньою силою, що спричиняє виникнення ЕРС, вираз якої установемо.

Напруженість поля цієї сторонньої сили

$$E_c = \frac{F_{in}}{e},$$

тому основне рівняння динаміки, в проекції на вісь яка спрямована вздовж дроту соленоїда) набуває вигляду

$$m \frac{dv}{dt} = -eE_c.$$

Помножимо це рівняння на елемент довжини соленоїда і проінтегруємо по всій довжині дроту соленоїда L . Дістанемо

$$\int_0^L \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} dl = - \int_0^L E_c dl.$$

Вираз у правій частині останнього рівняння – це електрорушійна сила \mathcal{E} , тому пишемо

$$\mathcal{E} = - \int_0^L \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} dl.$$

Взявши до уваги, що підінтегральний вираз не залежить від l , маємо

$$\mathcal{E} = - \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} \int_0^L dl,$$

звідки проінтегрувавши

$$\mathcal{E} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} L.$$

Якщо до кінців соленоїда приєднати гальванометр, то через нього потече струм I , який за законом Ома для замкненого кола

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

де R – опір соленоїда (опором гальванометра нехтуємо).

Підставивши \mathcal{E} з цієї рівності в попередню, маємо:

$$IR = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} L,$$

або

$$Idt = -\frac{mL}{eR} dv$$

звідки за означенням сили струму

$$dq = -\frac{mL}{eR} dv,$$

а після інтегрування

$$q = -\frac{mL}{eR} \int_{v_0}^0 dv = -\frac{mL}{eR} v_0,$$

де v_0 – лінійна швидкість дроту соленоїда на початку гальмування, q – заряд, який пройшов через гальванометр за час гальмування соленоїда.

З останньої рівності знаходимо питомий заряд електрона

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0 L}{qR}.$$

Як бачимо, у правій частині цієї рівності залишилися тільки ті величини, які можна виміряти.

Цей експеримент Толмен і Стюарт провели в 1916 році.

(101) Покажемо, що з основних постулатів класичної теорії електропровідності металів (КТЕМ) можна вивести закон Ома.

Раніше ми вже довели, що в провіднику зі струмом носії заряду дрейфують зі сталою швидкістю (задача 76). Знайдемо цю швидкість як середню швидкість між двома зіткненнями.

Вважаємо електричне поле в металі постійним. Тоді сила яка діє з боку поля на електрон, буде постійна, а дрейфовий рух електрона між зіткненнями буде рівноприскореним згідно з другим законом Ньютона. Крім того, відомо, що середня швидкість за рівноприскореного руху яка \bar{v} є вищезгаданою сталою дрейфовою швидкістю дорівнює половині кінцевої швидкості, тому

$$v = \frac{1}{2} v_{max} = \frac{1}{2} a \tau = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau,$$

де τ – час вільного пробігу (час релаксації). Враховуючи, що дрейфова швидкість електрона значно менша за середню квадратичну швидкість їх хаотичного руху \bar{v} , час вільного пробігу можемо представити у такому вигляді

$$\tau = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}},$$

де $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу електрона.

Тепер рівність для дрейфової швидкості набуде вигляду

$$v = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \bar{\lambda},$$

а відома формула $j = env$ –

$$j = \frac{e^2 n \bar{\lambda}}{2m} E,$$

тобто ми отримали закон Ома, де

$$\sigma = \frac{e^2 n \bar{\lambda}}{2m} = \frac{e^2 n}{2m} \tau. \quad (1)$$

(102) Покажемо, що з основних постулатів класичної теорії електропровідності металів можна вивести закон Джоуля-Ленца.

Згідно з третім постулатом КТЕМ один електрон передає йону енергію

$$\frac{mv_{max}^2}{2},$$

а N електронів –

$$N \frac{mv_{max}^2}{2},$$

причому ця передача енергії відбувається протягом часу вільного пробігу τ , тому енергія, передана ґратці за одиницю часу в одиниці об'єму (густина теплової потужності),

$$w = \frac{N}{V\tau} \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Підставивши у цю рівність послідовно означення концентрації $n = N/V$, означення прискорення за рівноприскореного руху $a = v_{max}/\tau$, другий закон Ньютона $a = F/m$ та означення напруженості електричного поля $E = F/e$, дістанемо

$$w = \frac{e^2 n \tau}{2m} E^2.$$

Як відомо з попередньої задачі $\sigma = \frac{e^2 n}{2m} \tau$, тому

$$w = \sigma E^2,$$

тобто ми отримали закон Джоуля-Ленца (задача 97).

(103) На основі КТЕМ виведемо емпіричний закон Відемана-Франца, який полягає у тому, що відношення питомої теплопровідності до питомої електропровідності для усіх металів за певної температури є сталою величиною.

$$\frac{K}{\sigma} = A',$$

а за зміни температури це відношення зростає пропорційно до температури

$$\frac{K}{\sigma} = AT.$$

З фізичної кінетики відомо, що коефіцієнт теплопровідності газів

$$K = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V, \quad (2)$$

де ρ – густина газу, c_V – його питома теплоємність за сталого об'єму.

Густина електронного газу ρ представимо згідно з означеннями густини та концентрації:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Mn}{N} = mn,$$

де M – маса електронного газу, V – його об'єм, N – кількість електронів, m – маса електрона, а теплоємність згідно з формулою, яка впливає з першого закону термодинаміки:

$$c_V = \frac{1}{M} \frac{dU}{dT} = \frac{1}{M} \frac{d}{dT} \left(\frac{3}{2} NkT \right) = \frac{3}{2} \frac{Nk}{M} = \frac{3}{2} \frac{k}{m},$$

де k – стала Больцмана, а внутрішня енергія U представлена як $\frac{3}{2} NkT$.

Підставивши дві останні рівності в рівність (2), дістанемо

$$K = \frac{1}{2} nk \overline{v} \overline{\lambda}.$$

Поділивши цей вираз на вираз для σ (1), дістанемо

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{km \overline{v}^2}{e^2}$$

і врахувавши, що $\frac{m \overline{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT$, остаточно матимемо

$$\frac{K}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Бачимо, що $\frac{K}{\sigma}$ пропорційне до температури з коефіцієнтом пропорційності $A = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2$.

(104) Покажемо, що в рамках КТЕМ можна пояснити температурну залежність опору металів.

З формули для питомої електропровідності (1), яка впливає з КТЕМ дістаємо для питомого опору

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m\bar{v}}{e^2 n \bar{\lambda}} = \frac{2m}{e^2 n \bar{\lambda}} \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

що означає, що $\rho \sim \sqrt{T}$, тоді як експеримент показує, що $\rho \sim T$, тобто висновок з КТЕМ нібито суперечить експериментові, якщо не взяти до уваги, що в останній рівності допущена помилка, яка полягає в тому, що середню квадратичну швидкість електронів \bar{v} представлено як $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$, де T – температура кристалічної ґратки. Насправді в останньому виразі мала би бути температура електронного газу T_e відмінна від температури ґратки T .

Проте питомий опір можна представити і через температуру ґратки якщо скористатися тим фактом, що середня довжина вільного пробігу електрона

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{n_\phi}$$

де n_ϕ – концентрація фононів яка в свою чергу пропорційна до температури ґратки, тому

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{T}.$$

З цієї рівності та рівності

$$\rho = \frac{2m\bar{v}}{e^2 n \bar{\lambda}}$$

маємо, що

$$\rho \sim \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} \sim T.$$

Зауважимо, що у \bar{v} немає прихованої залежності від температури ґратки T , вона залежить від температури електронного газу T_e . Остання формула узгоджується з експериментом.

(105) Покажемо, що в рамках КТЕМ можна отримати правильний результат щодо теплоємності електронного газу.

Молярна теплоємність газу згідно з класичною теорією теплоємності дорівнює $i/2 R$, де i – кількість ступенів вільності молекул цього газу, R – універсальна газова стала. Оскільки електронний газ – це одноатомний газ, то $i=3$, і його молярна теплоємність дорівнює $3/2 R$. Крім того, згідно з законом Дюлонга й Петі молярна теплоємність кристалічної ґратки дорівнює $3R$. Отже, молярна теплоємність металу буде $\frac{3}{2} R + 3R = 4,5R$, що суперечить експерименту.

Цієї суперечності КТЕМ також можна уникнути, якщо, дотримуючись концепції ідеального газу і взявши до уваги те, що електронний газ не перебуває в тепловій рівновазі з ґраткою ввести температуру електронного газу T_e , відмінну від температури ґратки T .

(106) Установимо зв'язок концентрації вільних електронів у металі з його густиною і молярною масою.

Згідно з означенням концентрації

$$n = \frac{N}{V},$$

де N – загальна кількість вільних електронів у цьому зразку металу, V – його об'єм.

Оскільки кожен атом постачає z вільних електронів, де z – валентність, а атомів є $N_A \nu$, де N_A – число Авогадро, ν – кількість молів, то

$$N = zN_A \nu.$$

Представивши об'єм V металу через масу й густину металу, а кількість речовини через масу й молярну масу, дістанемо

$$n = \frac{zN_A \nu}{V} = \frac{z m \rho N_A}{\mu m} = N_A \frac{z \rho}{\mu}.$$

Наприклад, для міді

$$n = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{2 \cdot 8,9 \cdot 10^3}{0,0655} = 1,64 \cdot 10^{29} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

Тема 7. Провідність напівпровідників

Фізичні поняття

• **Напівпровідник** – речовина, провідність якої сильно залежить від зовнішніх впливів – нагрівання, опромінення, тиску, вологості, легування (уведення домішок).

• **Власна провідність напівпровідника** – провідність напівпровідника, зумовлена власними носіями заряду.

• **Домішкова провідність напівпровідника** – провідність напівпровідника, зумовлена наявністю у ньому домішок.

• **Дірка** – вільна позитивно заряджена квазічастинка в напівпровіднику, заряд якої дорівнює заряду електрона.

• **Донор** – домішка в напівпровіднику, яка зумовлює його електронну провідність.

• **Акцептор** – домішка в напівпровіднику, яка зумовлює його діркову провідність.

• **Вільна зона (інакше зона провідності)** – зона на енергетичній шкалі, перебуваючи в якій електрон є вільним всередині кристала.

• **Валентна зона** – зона на енергетичній шкалі, перебуваючи у якій електрон не може вільно пересуватися всередині кристала.

• **Заборонена зона** – зона на енергетичній шкалі, в якій не може перебувати електрон, або, інакше, проміжок енергій, яких не може набувати електрон.

• **Енергія йонізації донора** – енергія, яку слід надати електрону домішкового атома, щоб він став вільним електроном.

• **Енергія активації акцептора** – енергія, яку слід надати валентному електрону, щоб він приєднався до акцепторного атома.

• **Ширина забороненої зони** – мінімальна енергія, яку слід надати валентному електрону, щоб він став вільним електроном.

• **Напівпровідник n -типу провідності** – це напівпровідник, в якому основними носіями струму є електрони.

• **Напівпровідник p -типу провідності** – це напівпровідник, в якому основними носіями струму є дірки.

• **p - n - перехід** – межа між напівпровідниками n - та p - типу провідності.

Фізичні величини

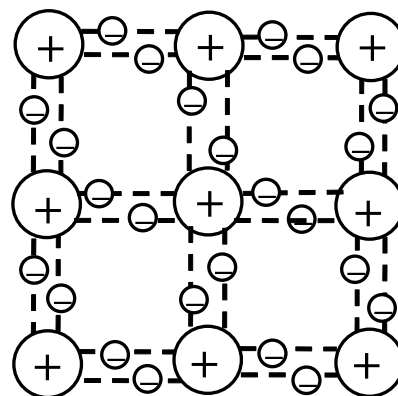
• **Хемічний потенціал** – це темп зміни внутрішньої енергії системи зі зміною числа її частинок.

$$\mu = \frac{dW}{dN}.$$

Задачі

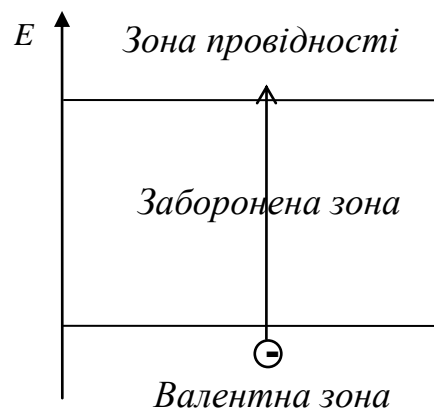
(107) **Покажемо, що власна провідність напівпровідника зумовлена двома типами носіїв заряду – електронами й дірками.**

Якщо немає жодних зовнішніх впливів, то напівпровідник, наприклад, кремній є діелектриком. Дійсно, з малюнка 66 видно, що всі електрони беруть участь в утворенні ковалентних зв'язків.



Мал. 66

За нагрівання чи опромінення будь-який валентний електрон може отримати достатню енергію, щоб відірватися від атома і стати вільним електроном. При цьому його місце залишиться вільним. Оскільки ймовірність появи такого вільного місця однакова біля кожного атома, то це вільне місце може вільно «блукати» всередині кристалу, коли воно буде заповнене електроном, який відірвався від іншого атома. Такий рух вільного місця в напрямі, протилежному до напрямку руху електрона можна вважати рухом позитивної частинки з зарядом $+e$, яка називається *діркою* (дірка, насправді, є квазічастинкою, тобто не-реальною частинкою, бо вона, на відміну від електрона, не може існувати поза кристалом). У зонній моделі це означає, що електрон перейшов з валентної зони в зону провідності (мал. 67). При цьому у



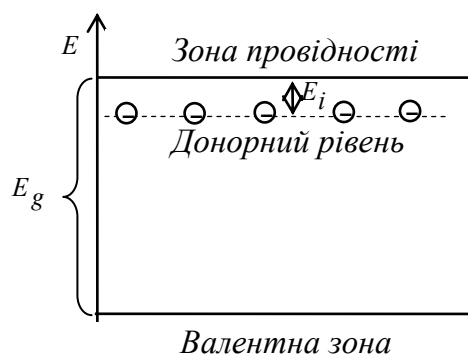
Мал. 67

валентній зоні утворюється дірка, яка може вільно переміщатися всередині кристала.

В електричному полі, очевидно, електрони будуть рухатися проти напрямку силових ліній, а дірки – за напрямом силових ліній, таким чином створюючи електричний струм.

(108) Покажемо, що в напівпровіднику кремнію домішки фосфору, миш'яку та сурми є донорами, а домішки бору, галію та індію – акцепторами.

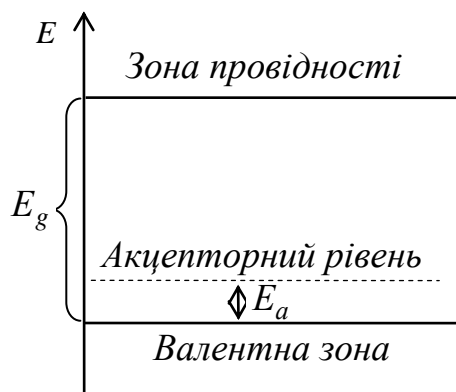
Оскільки кремній у періодичній системі елементів розміщений у четвертій групі, то в його атомі на зовнішній оболонці є чотири валентних електрони. Також відомо, що ці чотири електрони утворюють парноелектронні (ковалентні) зв'язки з іншими чотирма електронами, які належать до інших чотирьох атомів (мал. 66).



Мал. 68

Якщо до кремнію додати домішки фосфору, миш'яку чи сурми, які є у п'ятій групі, тобто мають по п'ять валентних електронів, то чотири електрони утворять ковалентний зв'язок, а п'ятий залишиться «зайвим» і може легко стати вільним електроном, що означає, що ці атоми в кремнію є донорами. У зонній моделі це виглядає так, що в забороненій зоні близько до зони провідності є енергетичний рівень, який заповнений електронами (мал. 68) і які саме через свою близькість до зони провідності здатні легко постачати електрони в зону провідності.

Якщо в кремній додати невелику кількість атомів елементів третьої групи (бор, галій, індій чи алюміній), то три



Мал. 69

валентні електрони утворюють ковалентні зв'язки, а одне місце залишиться не заповненим, причому якщо домішок небагато, то це незаповнене місце може з однаковою ймовірністю виникнути біля будь-якого атома (коли електрон від іншого атома перейде на вільне місце), тобто воно може вільно «блукати» у кристалі і трактуватися як вільна позитивна частинка яка, як відомо, називається діркою. Заряд дірки, як бачимо, дорівнює зарядові електрона, і є вона квазічастинкою, тобто несправжньою частинкою – вона на відміну від електрона, не може залишити кристал і існувати поза ним.

У зонній моделі це виглядає так: у забороненій зоні (близько до валентної зони) є незаповнений електронами енергетичний рівень (мал. 69), на який може легко перейти електрон з валентної зони, утворивши таким чином у валентній зоні дірку.

(109) Покажемо, що за низьких температур у напівпровідниках переважає домішкова провідність, а за високих – власна.

Власна провідність напівпровідників виникає внаслідок переходів електронів з валентної зони в зону провідності (мал. 67), а домішкова – внаслідок переходів електронів з донорного рівня в зону провідності (мал. 68) або з валентної зони на акцепторний рівень (мал. 69).

Очевидно, для виникнення домішкової провідності потрібна значно менша енергія, бо енергетична відстань від донорного рівня до зони провідності E_i чи від валентної зони до акцепторного рівня E_a значно менша від ширини забороненої зони E_g . Тому за низьких температур коли енергії теплового руху пропорційної до kT достатньо для переходу електрона з донорного рівня в зону провідності або з валентної зони на акцепторний рівень, виникає домішкова провідність.

За високих температур відбуваються переходи електронів з валентної зони в зону провідності, що зумовлює власну провідність. При цьому зі збільшенням температури домішкова провідність зали-

шається. Проте, оскільки концентрація власних атомів напівпровідника значно більша за концентрацію домішкових атомів (кількість електронів у валентній зоні значно більша за їхню кількість на донорному рівні чи за кількість вільних місць на акцепторному рівні), то за високих температур всі електрони переходять з донорних рівнів в зону провідності чи всі вільні місця на акцепторному рівні вже зайняті електронами які прийшли з валентної зони (настає так зване виснаження домішок) і домішкова провідність виявляється значно меншою за власну.

(110) Покажемо, що на відміну від провідників опір напівпровідників зменшується з підвищенням температури.

Справді, з підвищенням температури зростає енергія теплового руху і все більша кількість електронів має можливість переходити з валентної зони чи то в зону провідності (мал. 67) чи то на акцепторний рівень (мал. 69), чи то з донорного рівня в зону провідності (мал. 68).

Таким чином зростає концентрація вільних електронів та дірок, що і є причиною зростання питомої електропровідності яка, як відомо, є пропорційною до концентрації: $\sigma = en\mu$.

Порівняємо цей механізм температурного зростання провідності напівпровідника з механізмом її температурного зменшення у металах, де це зменшення пов'язане зі зменшенням рухливості електронів внаслідок їхніх зіткнень з фононами, концентрація яких зростає з ростом температури. Очевидно, що цей механізм температурного зменшення провідності діє і в напівпровідниках, проте збільшення концентрації вільних носіїв настільки стрімке, що зменшення рухливості практично не впливає на загальне зростання провідності.

Очевидно, що питома провідність напівпровідників є сумою електронної та діркової провідностей

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p),$$

де n , μ_n – концентрація та рухливість електронів, p , μ_p – концентрація та рухливість дірок.

(111) На основі розподілу Больцмана та того факту, що хемічний потенціал у власному напівпровіднику є приблизно посередині забороненої зони встановимо залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури.

Згідно з розподілом Больцмана концентрація електронів провідності

$$n = n_0(T) e^{-\frac{\mu}{kT}},$$

де $n_0(T)$ – степенева функція від температури; μ – хемічний потенціал, T – абсолютна температура.

Оскільки питома провідність є пропорційною до концентрації, то вона буде залежати від температури за таким самим законом:

$$\sigma = \sigma_0(T) e^{-\frac{\mu}{kT}}.$$

Підставивши в останню рівність $\mu = \frac{1}{2} E_g$, де E_g – ширина забороненої зони, дістанемо

$$\sigma = \sigma_0(T) e^{-\frac{E_g}{2kT}}.$$

Врахуємо також, що степенева залежність є значно слабшою за експонентну, тобто $\sigma_0(T)$ можна вважати сталою величиною. Тоді:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}}.$$

При виведенні цієї формули ми не врахували залежності концентрації дірок від температури, проте, очевидно, що оскільки у власному напівпровіднику вона дорівнює концентрації вільних електронів, то ця залежність також експонентна і на остаточний вигляд залежності питомої провідності від температури це не вплине. Крім того, при виведенні цієї залежності ми знехтували залежністю рухливості від температури з тієї ж причини, що і залежністю $\sigma_0(T)$: вона значно слабша за експонентну залежність.

Позаяк питомий опір є обернений до питомої провідності, то з останньої формули дістанемо

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{E_g}{2kT}}.$$

Оскільки опір пропорційний до питомого опору то його температурна залежність така ж сама

$$R = R_0 e^{\frac{E_g}{2kT}}.$$

Зазначимо, що експонентна залежність питомої провідності напівпровідників від температури підтверджується експериментально.

(112) На основі розподілу Больцмана та того факту, що хемічний потенціал у домішковому напівпровіднику є приблизно посередині між домішковим рівнем та відповідною зоною (зоною провідності у донорному напівпровіднику чи валентною зоною в акцепторному) установемо температурну залежність домішкової провідності.

Очевидно, що підстановка $\mu = \frac{1}{2}E_a$, де E_a – енергія активації домішкових атомів, у закон розподілу Больцмана подібно (як у випадку власного напівпровідника (задача 111)) приведе до експонентної

залежності питомої провідності, питомого опору та опору від температури

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_a}{2kT}},$$

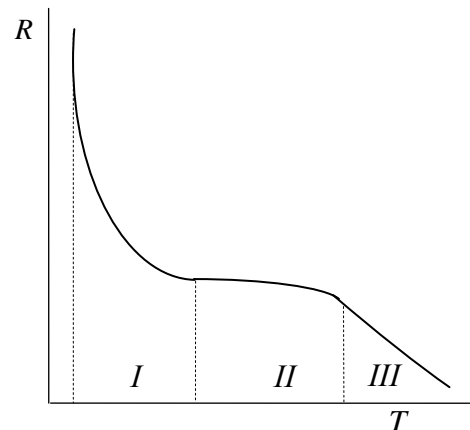
$$\rho = \rho_0 e^{\frac{E_a}{2kT}},$$

$$R = R_0 e^{\frac{E_a}{2kT}},$$

що також добре узгоджується з експериментом.

(113) Пояснимо типову експериментальну залежність опору напівпровідника від температури.

З малюнка 70, де показана типова експериментальна залежність опору напівпровідника від температури бачимо, що в області низьких температур *I* підвищення температури спричиняє стрімке (експонентне) зменшення опору, що пояснюється активними переходами електронів з донорного рівня в зону провідності (мал. 68) чи з валентної зони на акцепторний рівень (мал. 69).



Мал. 70

Опір на цій ділянці підкоряється залежності (задача 112)

$$R = R_0 e^{\frac{E_a}{2kT}}.$$

Далі температурний темп падіння опору сповільнюється навіть до такої міри, що опір перестає залежати від температури (ділянка *II*), що пояснюється тим, що всі електрони з донорного рівня вже перейшли в зону провідності чи всі вільні місця на акцепторному

рівні вже заповнені електронами і наступне підвищення температури вже не збільшує концентрацію електронів в зоні провідності чи дірок у валентній зоні, а температура ще занадто низька для того щоб електрони могли масово долати заборонену зону переходячи в зону провідності безпосередньо з валентної зони. Це область виснаження донорів чи повного насичення акцепторів.

Якщо і далі підвищувати температуру, то очевидно, ймовірність переходу електрона з валентної зони у зону провідності стає все більшою, зона провідності активно заповнюється і опір знову стрімко падає (ділянка III) підкоряючись залежності (задача 111)

$$R = R_0 e^{\frac{E_g}{2kT}}.$$

(114) Покажемо, як на основі експериментальної температурної залежності питомої провідності напівпровідника можна обчислити його ширину забороненої зони E_g та енергію активації домішки E_a .

Будемо базуватися на отриманій нами залежності питомої електропровідності від температури

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

де $\Delta E = E_a$ за низьких температур і $\Delta E = E_g$ за високих.

Перейдемо до залежності питомого опору від температури. Оскільки $\rho = 1/\sigma$, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

звідки

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}}$$

і відповідно опір

$$R = R_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Прологаритмувавши останнє рівняння, дістанемо

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{\Delta E}{2kT},$$

звідки бачимо, що залежність

$\ln R$ від $\frac{1}{T}$ є лінійною, причому

ця пряма нахилена до осі $\frac{1}{T}$ під кутом, тангенс якого дорівнює $\frac{\Delta E_g}{2k}$ (мал. 71), а доданок $\ln R_0$ не впливає на цей нахил. Отже

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta E}{2k},$$

звідки

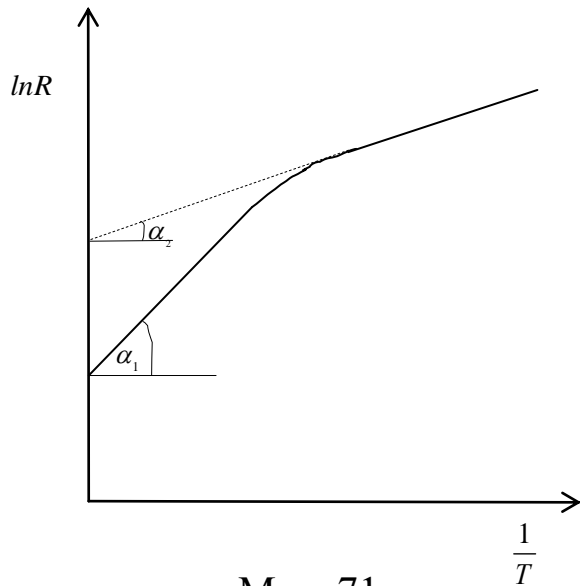
$$\Delta E = 2k \operatorname{tg} \alpha.$$

За високих температур отримуємо ширину забороненої зони

$$E_g = 2k \operatorname{tg} \alpha_1,$$

а за низьких – енергію активації домішки

$$E_a = 2k \operatorname{tg} \alpha_2.$$



Мал. 71

Зауважте, що на графіку $\ln R\left(\frac{1}{T}\right)$ високі температури є ближче до початку відліку, а низькі – далі від нього, а нахил прямої за високих температур стрімкіший ніж за низьких бо $E_g > E_a$.

Отже, вимірявши експериментально залежність опору напівпровідника від температури $R(T)$, можемо знайти ширину забороненої зони цього напівпровідника E_g та енергію активації домішки E_a .

Тема 8. Контактні явища у металах

Фізичні поняття

• **Поверхневий стрибок потенціалу** – різниця потенціалів між поверхнею металу та вакуумом.

• **Робота виходу електрона з металу** – робота, яку слід виконати, щоб перемістити вільний електрон з металу в нескінченність.

• **Зовнішня різниця потенціалів** – це різниця потенціалів, яка виникає на контакті двох металів внаслідок різних робіт виходу електронів з цих металів.

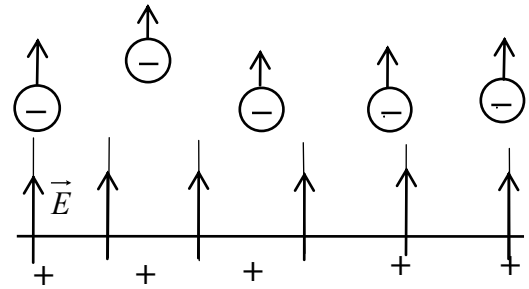
• **Внутрішня різниця потенціалів** – це різниця потенціалів, яка виникає на контакті двох металів внаслідок різної концентрації вільних електронів у цих металах.

Задачі

(115) Покажемо, що між поверхнею металу та вакуумом виникає різниця потенціалів, так званий поверхневий стрибок потенціалу і встановимо її зв'язок з роботою виходу електронів з металу.

Згідно з основними постулатами КТЕМ, вільні електрони рухаються хаотично з великою швидкістю, тому електрон, який є дуже близько до поверхні металу і має в цей момент часу напрям

швидкості в бік поверхні, може вийти з металу. Очевидно, що як тільки якась кількість електронів покине метал, він зарядиться позитивно, бо порушиться електронейтральність, яка була до того, що спричинить виникнення електричного поля (мал. 72), спрямованого від металу. Саме це електричне поле буде перешкоджати новим електронам виходити з металу, бо вони не зможуть рухатися за силовими лініями. Отже, за певної величини цього електричного поля установиться динамічна рівновага, тобто стан, коли кількість електронів, які виходять з металу, дорівнює кількості електронів, які повертаються в метал за одиницю часу. При цьому над металом зависне так звана *електронна хмара*.



метал

Мал. 72

Згідно з означенням потенціалу різниця потенціалів, яка при цьому виникне,

$$\varphi = \frac{A}{e},$$

де A – робота, яку слід виконати, щоб перенести електрон з поверхні металу в нескінченність, тобто робота виходу електрона з металу.

(116) Покажемо, що між двома різними металами виникає зовнішня різниця потенціалів і встановимо вираз для цієї різниці потенціалів.

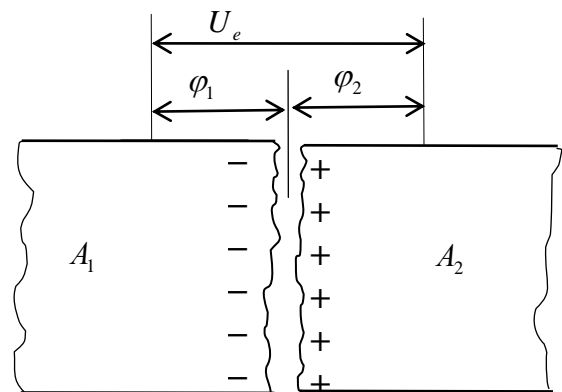
Приведемо в контакт два різні метали. Так само як виникає різниця потенціалів на межі металу з вакуумом (чи повітрям), між ними виникне контактна різниця потенціалів (мал. 73). Дійсно між першим металом і вакуумом виникне різниця потенціалів φ_1 , а між

вакуумом і другим металом – $(-\varphi_2)$. Тому різниця потенціалів між двома металами, яку позначимо U_e буде:

$$U_e = \varphi_1 + (-\varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_1}{e} - \frac{A_2}{e} = \frac{A_1 - A_2}{e},$$

де індекс e вказує на зовнішню різницю потенціалів (від англійського слова *external*, що означає «зовнішній»).

З останньої формули бачимо, що зовнішня різниця потенціалів залежить від різниці робіт виходу електронів з цих металів. Наприклад, якщо $A_1 > A_2$ то U_e є додатною величиною, тому електричне поле спрямоване від другого металу до першого (згадаймо, що електричне поле спрямоване в бік зростання потенціалу). Отже перший метал має негативний заряд, а другий – позитивний, а це означає, що електрони перейшли з другого металу в перший, тобто з того металу, де робота виходу менша в той, де вона більша.



Мал. 73

(117) Вважаючи вільні електрони в металі класичним електронним газом, покажемо, що між двома різними металами виникає внутрішня різниця потенціалів і встановимо, як вона залежить від концентрацій вільних електронів у цих металах та температури.

Внутрішня різниця потенціалів пов'язана з різними концентраціями електронів у двох металах. Дійсно, якщо привести в контакт два метали з різними концентраціями електронів, то тиск електронного газу згідно з постулатами КТЕМ $p = nkT$ буде більший в тому металі,

де більша концентрація електронів, тому електрони переходитимуть через контакт, порушуючи електронейтральність в обидвох металах, що спричинить виникнення нескомпенсованих зарядів і, відповідно, різниці потенціалів.

Установимо вираз для цієї різниці потенціалів на основі КТЕМ. Для цього на межі двох металів розглянемо циліндр з площами основ S і нескінченно малою висотою dx (мал. 74). На цей циліндр зліва буде тиск $p_1 = n_1 kT$, а справа тиск $p_2 = n_2 kT$. Нехай $n_2 > n_1$, тоді різниця тисків буде $\Delta p = (n_2 - n_1)kT = \Delta n kT$.

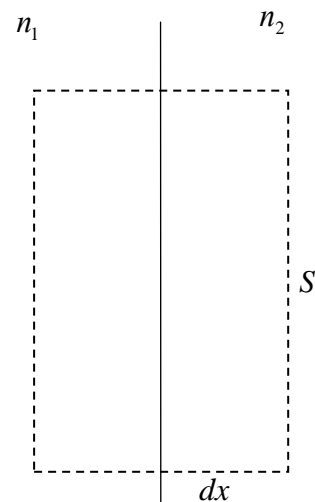
За зміни концентрації на dn , яка станеться внаслідок переходу електронів справа наліво, різниця тисків зміниться на

$$dp = kTdn.$$

При цьому сила, яка діє на електрони

$$dF = Sdp = SkTdn.$$

Але внаслідок переходу електронів порушиться електронейтральність обидвох металів і перший метал зарядиться негативно, а другий позитивно, спричинивши виникнення електричного поля, яке діятиме на електрони в протилежному напрямі з силою:



Мал. 74

$$dF_{ел.} = Edq = EedN = EendV = eEnSdx = -e \frac{d\phi}{dx} nSdx = -enSd\phi,$$

де послідовно застосовано: означення напруженості електричного поля, принцип квантованості електричного заряду, означення концентрації та формулу зв'язку напруженості та потенціалу.

Коли сила електричного поля, яка поступово зростає в міру переходу електронів, зрівняється з силою тиску, яка поступово зменшується, рух електронів припиниться. Отже, умова рівноваги

$$dF = dF_{\text{ел.}},$$

або

$$SkTdn = -enSd\varphi,$$

звідки

$$d\varphi = \frac{kT}{e} \frac{dn}{n}$$

і після інтегрування

$$\varphi = \frac{kT}{e} \ln n + C.$$

Сталу C знаходимо з того, що за умови $n = n_1$, $\varphi = \varphi_1$, звідки дістаємо після підстановки

$$C = \varphi_1 - \frac{kT}{e} \ln n_1.$$

Тепер залежність $\varphi(n)$ має вигляд

$$\varphi = \frac{kT}{e} \ln \frac{n}{n_1} + \varphi_1.$$

Підставивши сюди $n = n_2$, знаходимо внутрішню контактну різницю потенціалів

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}$$

і позначивши її U_i , де індекс i – це перша буква англійського слова internal, що означає внутрішній,

$$U_i = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}.$$

(118) Вважаючи вільні електрони в металі квантовим електронним газом, встановимо залежність внутрішньої контактної різниці потенціалів від концентрації вільних електронів у металах та температури.

Згідно з означенням хемічний потенціал можна трактувати як внутрішню енергію електронного газу яка припадає на один електрон, тому різниця хемічних потенціалів буде визначати різницю енергій електронів у двох металах. Згідно з означенням потенціалу внутрішня контактна різниця потенціалів

$$U_i^{кв.} = \frac{1}{e}(\mu_2 - \mu_1),$$

де μ_1 і μ_2 – хемічні потенціали цих металів.

З квантової статистики відомо, що

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right),$$

де

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

це хемічний потенціал за умови $T = 0$.

Підставивши два останні вирази у вираз для $U_i^{кв.}$, дістанемо

$$U_i^{кв.} = \frac{0,12h^2}{em} \left(n_2^{\frac{2}{3}} - n_1^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{6,8mk^2}{eh^2} \left(n_1^{-\frac{2}{3}} - n_2^{-\frac{2}{3}} \right) T^2.$$

(119) Установимо вирази для контактної різниці потенціалів як в класичній, так і в квантовій моделях і встановимо перший закон Вольта.

Очевидно, що контактна різниця потенціалів між двома металами дорівнює сумі внутрішньої і зовнішньої різниць потенціалів, тобто в класичній моделі

$$U_{кл} = U_e + U_i = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}$$

і в квантовій моделі

$$U_{кв} = U_e + U_i^{кв} = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{0,12h^2}{em} \left(n_2^{\frac{2}{3}} - n_1^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{6,8mk^2}{eh^2} \left(n_1^{-\frac{2}{3}} - n_2^{-\frac{2}{3}} \right) T^2.$$

З цих формул видно, що контактна різниця потенціалів залежить від роду металу (концентрації вільних електронів та робіт виходу у двох металах) і від температури. Цей закон був встановлений експериментально (як і саме явище) в 1797 році французьким фізиком Алесандро Вольта.

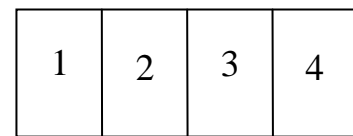
Крім того, бачимо, що залежно від робіт виходу A_1 і A_2 та концентрацій n_1 і n_2 перший та другий доданки можуть мати як однакові, так і різні знаки, тому величини контактних різниць потенціалів

дуже різні і між деякими металами чи сплавами можуть навіть практично дорівнювати нулеві.

(120) Доведемо другий закон Вольта: якщо послідовно привести в контакт багато різних металів, які перебувають за однакової температури, то різниця потенціалів між крайніми металами не залежить від того, які саме метали включені як проміжні у цьому з'єднанні, а залежить лише від типу цих крайніх металів.

Знайдемо різницю потенціалів U між крайніми металами (мал. 75)

$$U = (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_4 - \varphi_3) = \varphi_4 - \varphi_1.$$

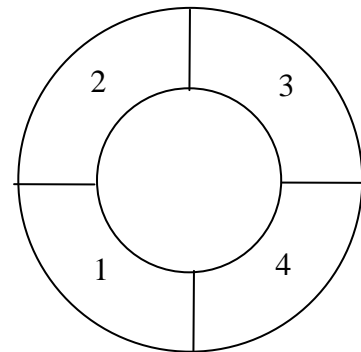


Мал. 75

З цього закону випливає, що якщо скласти замкнене коло з контактів кількох металів, то різниця потенціалів між будь-якими з них дорівнюватиме нулеві.

Дійсно, якщо з'єднати метали 1 і 4 (мал. 76) дістанемо

$$U = (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_4 - \varphi_3) + (\varphi_1 - \varphi_4) = 0.$$



Мал. 76

(121) Покажемо, що контакт двох металів не має односторонньої провідності.

Для цього оцінимо товщину приконтактного шару, в якому порушена електронейтральність, тобто товщину зарядженого приконтактного діелектричного шару. Ми вже з'ясували, що в приконтактних областях внаслідок переходу електронів з одного металу в інший під впливом двох чинників, з одного боку від контакту виникає

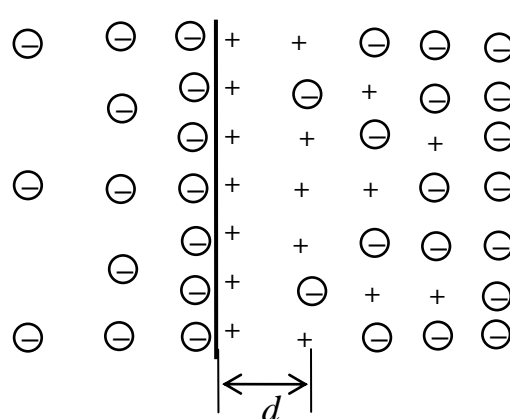
недостача, а з другого – надлишок електронів (задачі 116 і 117). Очевидно, що немає чіткої границі між зарядженою і незарядженою областями, а заряд зменшується поступово в обидвох напрямках від контакту приблизно так, як показано на мал. 77.

Вважатимемо приконтатну область за плоский конденсатор, відстань між пластинами якого d , а ємність згідно з її означенням $C = \frac{q}{U}$, де U – контактна різниця потенціалів.

$$U = \frac{q}{C} = \frac{eN}{C} = \frac{enV}{C} = \frac{endSd}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{end^2}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

звідки

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 U}{en}}.$$



Мал. 77

При виведенні цієї формули (крім означення ємності) ми застосували принцип квантованості заряду, означення концентрації та формулу ємності плоского конденсатора.

Для того, щоб зробити обчислення за останньою формулою, слід визначитися з концентрацією зарядів n та діелектричною проникністю ε .

Щодо концентрації зарядів n , то ми можемо стверджувати, що вона не менша за концентрацію вільних електронів в металах.

Про діелектричну проникність такого діелектрика можна лише сказати, що вона не менша за 1 (зауважимо, що в стані, близькому до діелектричного, перебуває лише приконтатна область з боку того металу, який віддав електрони).

Підставивши значення відповідних фізичних величин в останню формулу, дістанемо

$$d \approx \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{28}}} = 7,4 \cdot 10^{-11} \text{ м,}$$

тобто товщина діелектричного шару співвимірна з міжатомними відстанями, і оскільки вона є дуже мала то струм через контакт двох металів тече практично без перешкод.

Тема 9. Явища в контактах двох напівпровідників та напівпровідника з металом

Фізичні поняття

- ***p-n- перехід*** – межа між напівпровідниками *n-* та *p-*типу провідності.

Фізичні системи й прилади

- **Напівпровідниковий діод** – прилад який має односторонню провідність завдяки контакту двох напівпровідників з різними типами провідності або напівпровідника з металом.

- **Транзистор** – прилад який має два *p-n* – переходи і призначений для генерування чи підсилення електричних коливань.

Задачі

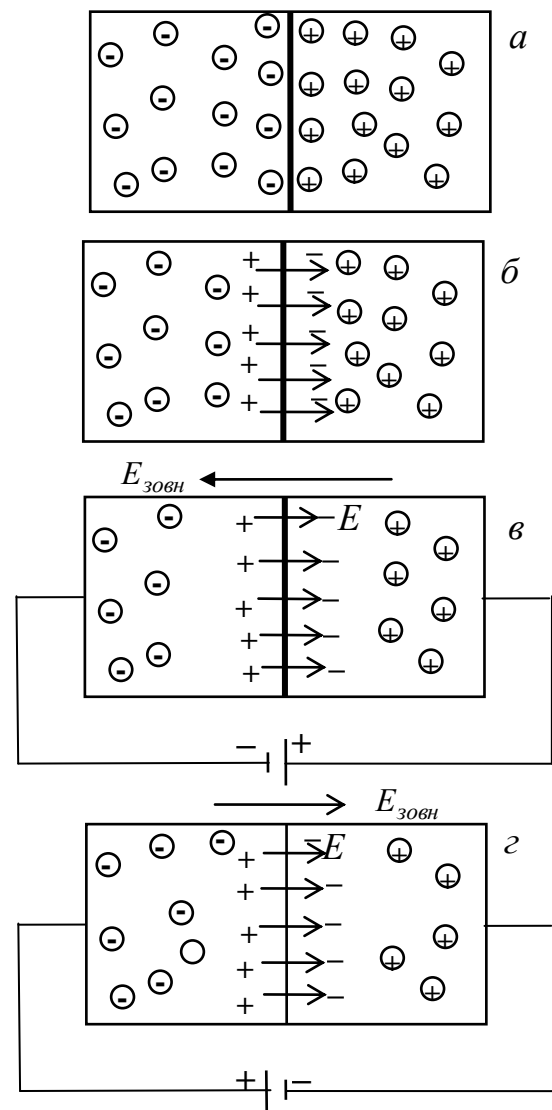
(122) **Пояснимо механізм виникнення односторонньої провідності на *p-n*– переході.**

Приведемо в контакт напівпровідник *n*-типу провідності з напівпровідником *p*-типу провідності (мал. 78, *a*). Оскільки тиск електронного газу в напівпровіднику *n*– типу значно більший за тиск в напівпровіднику *p*– типу, то електрони почнуть рухатися з *n*– напівпровідника в *p*- напівпровідник і рекомбінувати з дірками, що приведе до порушення електронейтральності в приконтактних областях з обидвох боків *p-n*- переходу, а саме в *n*-напівпровіднику виникне некомпенсований позитивний заряд, а в *p*-напівпровіднику – негативний за-

ряд, що, своєю чергою, призведе до виникнення електричного поля. Тепер електронам, щоб перейти з n -напівпровідника в p -напівпровідник, слід рухатися за силовими лініями, тобто пройти проти сили електричного поля, що можливо лише тоді, коли сила тиску перевищує силу електричного поля. Тому очевидно, що коли напруженість поля зросте до такої величини, що сила цього поля зрівняється з силою тиску, процес переходу електронів і їхньої рекомбінації з дірками припиниться і настане рівноважний стан з певною величиною напруженості внутрішнього електричного поля i , відповідно, контактною різницею потенціалів (мал. 78, б).

Під'єднаємо тепер джерело постійного струму позитивним полюсом до p -напівпровідника, а негативним – до n -напівпровідника (мал. 78, в). Тоді зовнішнє поле, як видно з малюнка, перекомпенсує внутрішнє поле і електрони легко переходитимуть у p -напівпровідник проти поля, а дірки в n -напівпровідник за полем і рухатимуться по колу: в цьому випадку p - n -перехід буде відкритий.

Якщо ж полюси джерела під'єднати навпаки (мал. 78, г), то зовнішнє поле підсилить внутрішнє, не даючи змоги електронам переходити через контакт і струм проходити не буде, тобто p - n -перехід буде практично закритий, а незначний струм буде текти тому, що в напівпровіднику n -типу є незначна кількість дірок, а в напівпровіднику p -типу – електронів, які будуть легко переходити через p - n -перехід.



Мал.78

(123) Покажемо, що контакт металу з напівпровідником може як мати односторонню провідність, так і її не мати: залежно від природи цього металу і напівпровідника.

Скористаємося формулою товщини діелектричного шару, яку ми отримали, аналізуючи контакт двох металів (задача 121)

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{en}}.$$

Очевидно, що для випадку двох напівпровідників концентрація n має порядок від 10^{17} до 10^{23} м^{-3} , тому товщина діелектричного прошарку d буде порядку від 10^{-8} до 10^{-5} м , тобто від 100 до 100000 тисяч міжатомних відстаней, що, своєю чергою, означає виникнення суттєвої перешкоди для електричного струму.

У випадку контакту металу з напівпровідником усе буде залежати від того, куди перейдуть електрони: з металу в напівпровідник чи з напівпровідника у метал. Якщо електрони перейдуть з напівпровідника в метал, то діелектричний прошарок утвориться у напівпровіднику і він, відповідно, будучи широким, виявлятиме односторонню провідність. Якщо ж, навпаки, електрони перейдуть з металу в напівпровідник, і цей прошарок виникне в металі, то будучи вузьким, він не спричинятиме односторонньої провідності. Своєю чергою, електрони будуть переходити туди, де менша концентрація і більша робота виходу, тобто їхній перехід залежатиме від співвідношення концентрацій та різниці робіт виходу.

Тема 10. Термоелектричні явища

Фізичні явища

• **Ефект Зеебека (термоелектричний ефект)** – явище виникнення ЕРС між двома контактами двох різних металів, якщо ці контакти мають різну температуру.

• **Ефект Пельтьє** – явище нагрівання одного із спаїв термопари та охолодження іншого за пропускання через них електричного струму. Це явище можна вважати оберненим до термоелектричного ефекту.

• **Ефект Томсона** – явище нагрівання чи охолодження провідника зі струмом, вздовж якого є градієнт температури.

Фізичні системи й прилади

Термопара – два з'єднані між собою контакти двох різних металів (мал. 79). Ці контакти ще називають спаями.

Метал 1	Метал 2	Метал 1
------------	------------	------------

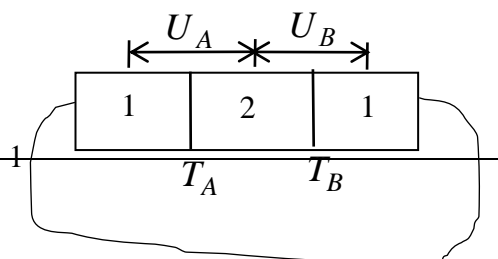
Мал. 79

Задачі

(124) Покажемо, якщо контакти (спаї) термопари перебувають за різних температур, то між ними виникає електрорушійна сила, яка пропорційна до цієї різниці температур.

Знайдемо різницю потенціалів на кінцях термопари за умови, що її спаї мають різну температуру (мал. 80)

$$\begin{aligned}
 U &= (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1' - \varphi_2') = U_A + U_B = \\
 &= \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT_A}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} + \frac{A_2 - A_1}{e} + \frac{kT_B}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} = \\
 &= \frac{k}{e} \left(T_A \ln \frac{n_2}{n_1} + T_B \ln \frac{n_1}{n_2} \right) = \frac{k}{e} \left(T_A \ln \frac{n_2}{n_1} - T_B \ln \frac{n_2}{n_1} \right) = \\
 &= \frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} (T_A - T_B).
 \end{aligned}$$



Якщо ж кінці термопари замкнуті металом 1, то на відміну від випадку однакових температур спаїв ця різниця потенціалів не дорівнюватиме нулю (задача 120), а й надалі дорівнюватиме U , тобто таким способом ми отримаємо джерело з ЕРС

$$\mathcal{E} = \frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} (T_A - T_B).$$

Сталу для цих двох металів величину $\frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}$ позначимо α . Тоді

$$\mathcal{E} = \alpha (T_A - T_B),$$

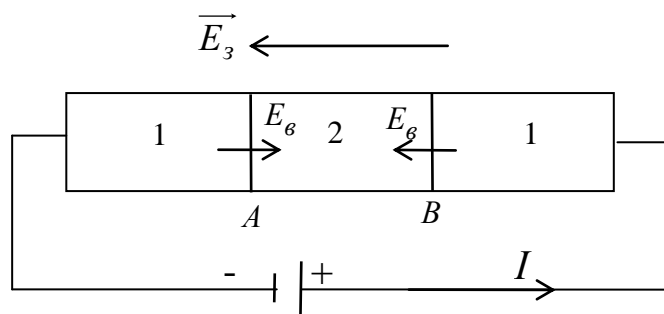
де α має назву коефіцієнта термоелектрорушійної сили.

Експерименти підтверджують цю лінійну залежність у досить широких інтервалах температур.

(125) З'ясуємо природу ефекту Пельтьє на основі класичної теорії електропровідності металів та знайдемо спосіб експериментального вимірювання теплоти Пельтьє.

Уявімо термопару, спаї якої перебувають за однакової температури, і через яку тече струм, створений джерелом ЕРС (мал. 81). Згадаємо, що на кожному зі

спаїв є контактна різниця потенціалів, причому, будучи однаковими за величиною, вони мають протилежні знаки, бо це є контакти тих самих металів 1 і 2. Тому якщо в одному спаї (спаї A) елек-



Мал. 81

трони рухаються за внутрішнім контактним полем, то в другому вони обов'язково рухатимуться проти цього поля. Отже, в контакті A електрони сповільнюються електричним полем джерела, а в контакті B

прискорюються, тому контакт A буде охолоджуватися, а контакт B нагрівається. Експериментально встановлено, що кількість теплоти Пельтьє пропорційна до заряду, який пройшов через спай.

$$Q_{\Pi} = \Pi q = \Pi I t,$$

де Π – коефіцієнт Пельтьє.

Зауважимо, що крім теплоти Пельтьє у термопарі виділяється і теплота Джоуля-Ленца Q_D , тому щоб її виміряти, слід виключити теплоту Джоуля-Ленца. Для цього вимірюємо кількість теплоти, яка виділяється в одному з спаїв за двох напрямів струму. У випадку під'єднання джерела, як показано на мал. 81, кількість теплоти, яка виділяється у спаї A : $Q_1 = Q_D - Q_{\Pi}$, а у випадку зміни напрямку струму на протилежний – $Q_2 = Q_D + Q_{\Pi}$. Віднявши дві останні рівності, дістанемо

$$Q_{\Pi} = \frac{Q_2 - Q_1}{2}.$$

Якщо виміряти ще й силу струму I та час t , протягом якого виділилася ця кількість теплоти Q_{Π} , можна обчислити і коефіцієнт Пельтьє:

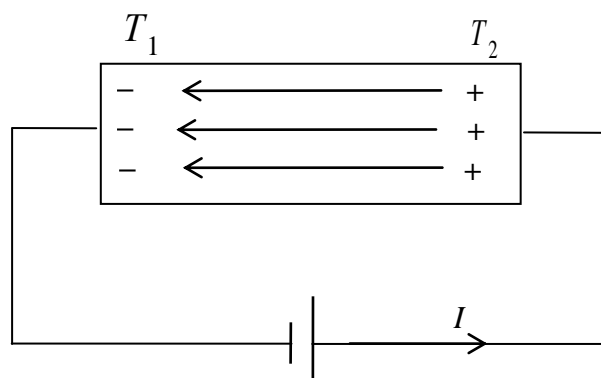
$$\Pi = \frac{Q_{\Pi}}{I t}.$$

У металів коефіцієнт Пельтьє має порядок від 0,001 до 0,01 В, а в напівпровідників – від 0,001 до 0,1 В.

(126) З'ясуємо природу ефекту Томсона і вкажемо на спосіб експериментального вимірювання теплоти Томсона.

Будемо пропускати струм через провідник, уздовж якого є градієнт температури (мал. 82). Нехай $T_1 < T_2$. Тоді тиск електронного

газу буде більшим на гарячому (правому) кінці і електрони почнуть рухатися в бік меншого тиску чим порушать електронейтральність на обидвох кінцях, що призведе до виникнення електричного поля всередині провідника. Якщо тепер до кінців цього провідника приєднати джерело струму позитивним полюсом до гарячого кінця, а негативним до холодного, то електрони, рухаючись проти внутрішнього поля, будуть прискорюватися і додатково нагрівати провідник. За зміни полярності джерела, навпаки, електрони, рухаючись за полем, будуть гальмуватися і провідник буде охолоджуватися.



Мал. 82

Експериментально встановлено, що теплота Томсона, що виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу

$$\frac{Q}{Vt} = k \frac{dT}{dx} j,$$

де k – коефіцієнт Томсона.

Якщо зміна температури вздовж провідника лінійна, то $\frac{dT}{dx}$ можемо замінити на $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ і отримати

$$Q = k \frac{\Delta T}{\Delta x} j V t = k \Delta T j S t = k \Delta T I t,$$

де замість $\frac{V}{\Delta x}$ ми підставили площу поперечного перерізу S , а $jS = I$.

Очевидно, для того, щоб виміряти теплоту Томсона, слід аналогічно до методу ефекту Пельтьє – виключити теплоту Джоуля-Ленца вимірюванням теплоти за двох протилежних напрямів струму.

Вимірявши крім Q силу струму I , різницю температур ΔT та час t , протягом якого виділилася ця кількість теплоти, з останньої формули можемо обчислити і коефіцієнт Томсона k .

Тема 11. Електричний струм у вакуумі

Фізичні поняття

- **Струм насичення** – максимальна й незалежна від напруги сила струму.

- **Робота виходу електрона з металу** – робота, яку слід виконати, щоб перенести електрон з металу в нескінченність (практично за межі металу).

Фізичні системи й прилади

- **Вакуумний діод** – герметична скляна посудина з вакуумом і двома вставленими в неї електродами.

Задачі

(127) Доведемо, що дрейфова швидкість електронів між катодом і анодом у вакуумному діоді є практично не залежною від напруги.

Дійсно, в електронному потоці між катодом і анодом присутні лише ті електрони, які вилетіли з катода, а вилетіли з катода ті електрони, теплова швидкість яких всередині катода була напрямлена в бік поверхні катода, тому дрейфова швидкість електронів – це їхня теплова швидкість, яка, як відомо, дуже велика, а її приріст завдяки збільшенню напруги незначний і не має практичного впливу на струм (на відміну від випадку провідника у якому дрейфова швидкість цілком визначається напругою).

Отже, дрейфова швидкість електронів у вакуумному діоді зі збільшенням напруги практично залишається сталою.

(128) Пояснимо природу вольт-амперної характеристики (ВАХ) вакуумного діода і зокрема струму насичення.

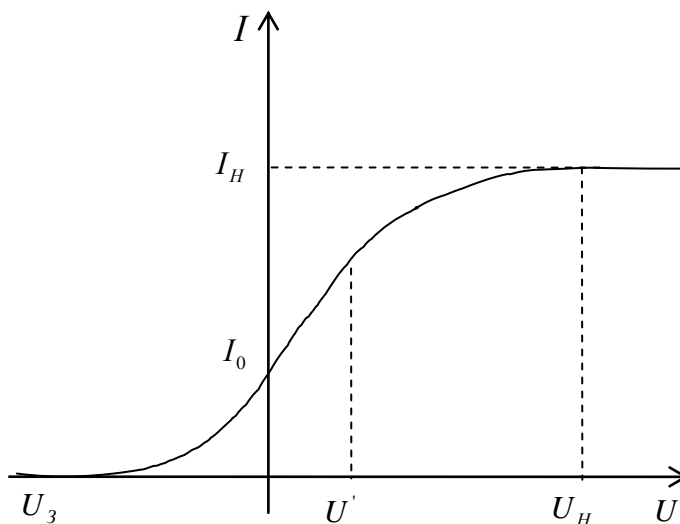
На мал. 83 схематично показана експериментальна ВАХ вакуумного діода, з якого бачимо, що струм в діоді з'являється навіть за відсутності напруги, тобто за $U = 0$ $I \neq 0$. Це має місце тому, що внаслідок виходу (емісії) електронів з катода під впливом тепла чи світла деяка їхня кількість досягає анода. Для того, щоб струм не протікав через діод, слід між катодом і анодом створити таку різницю потенціалів U_3 , щоб електрони рухалися за електричним полем і гальмувалися ним, тобто на катоді має бути «плюс», а на аноді «мінус». Ця напруга називається затримуючою.

Тепер прикладемо напругу в прямому напрямі і будемо її збільшувати. Очевидно, що сила струму буде зростати, проте, як бачимо, не лінійно як у провіднику, тобто не підкоряючись закону Ома, а згідно із законом Богуславського-Ленгмюра

$$I = BU^{\frac{3}{2}},$$

де B – стала величина, яка залежить від форми й розмірів електродів.

Цьому факту є пояснення: якщо в провіднику зі збільшенням напруги зростає лише дрейфова швидкість електронів пропорційно збільшуючи струм згідно з формулою $j = env$, то у вакуумі те ж саме збільшення напруги приводить до збільшення лише концентрації електронів, причому концентрація електронів збільшується



Мал. 83

зі збільшенням напруги нелінійно. Дійсно, електронна хмара, яка зависає над металом, створюючи поверхневу різницю потенціалів (задача 115), перешкоджає виходу електронів з металу. Прикладена ж між катодом і анодом напруга послаблює цю поверхневу різницю потенціалів, тим самим зменшуючи концентрацію електронів у хмарі, і зі збільшенням напруги все більша кількість електронів, які емітували з катода, досягає анода, тобто зростає концентрація електронів, які беруть участь в провідності.

Закон Богуславського-Ленгмюра виконується лише на невеликій ділянці від U_z до U' , далі зростання сили струму сповільнюється і за певної напруги U_H вона вже не залежить від напруги, досягнувши струму насичення I_H . Це стається тому, що всі електрони, які емітують з катода, досягають анода і наступне збільшення напруги вище U_H не спричиняє до збільшення сили струму. Збільшення ж дрейфової швидкості зі збільшенням напруги, як ми довели (задача 127), незначне і практично не впливає на силу струму.

(129) На основі класичної теорії електропровідності встановимо залежність густини струму насичення у вакуумному діоді від температури катода та роботи виходу електрона з катода (формулу Річардсона).

Ми вже з'ясували, що дрейфова швидкість електронів між катодом і анодом є співвимірною з їхньою тепловою швидкістю в металі (задача 127), тобто

$$v \sim \bar{v} \sim \sqrt{T},$$

тому густина струму насичення

$$j_H = env \sim en\sqrt{T}.$$

Концентрацію електронів між катодом і анодом представимо за законом розподілу частинок за потенціальною енергією (розподілом Больцмана).

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Згідно з означенням потенціальної енергії, вона дорівнює роботі, яку слід виконати, щоб вивести електрон за межі металу, тобто роботі виходу, тому $U = A$ і

$$j_H \sim e\sqrt{T} e^{-\frac{A}{kT}},$$

або

$$j_H = C\sqrt{T} e^{-\frac{A}{kT}},$$

де C – стала величина, яка різна для різних металів.

(130) На основі формули Річардсона-Дешмана покажемо, як за допомогою експериментальної залежності густини струму насичення від температури можна обчислити роботу виходу електрона з металу.

Якщо залучити квантову статистику Фермі-Дірака до аналізу струму у вакуумі, то отримаємо формулу, подібну до формули Річардсона – формулу Річардсона-Дешмана

$$j_H = DT^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

де $D = 6,02 \cdot 10^5 \frac{A}{K^2 m^2}$ – величина стала для всіх металів (на відміну від сталої C у формулі Річардсона, яка для кожного металу має інше значення).

Прологаритмуємо останню формулу. Дістанемо

$$\ln j_H = \ln(DT^2) - \frac{A}{kT}.$$

Оскільки перший доданок дуже слабо залежить від температури (наприклад за зміни температури від 1000 до 2000 К він змінюється в 1,05 раза), то його можна вважати сталим. Тому

$$\ln j_H = \text{const} - \frac{A}{kT},$$

звідки бачимо, що графік залежності $\ln j_H$ від оберненої температури – це пряма з кутом нахилу α до осі $\frac{1}{T}$, тангенс якого дорівнює $\frac{A}{k}$, тобто

$$A = k \operatorname{tg} \alpha.$$

Для того, щоб побудувати пряму $\ln j_H = f\left(\frac{1}{T}\right)$ досить виміряти густину струму насичення за двох температур.

Тема 12. Електричний струм у рідинах

Фізичні поняття

- **Електроліт** – речовина, яка має йонний механізм провідності.
- **Електролітична дисоціація** – розпад молекул розчиненої речовини на йони.

• **Електроліз** – виділення на електродах атомів, які входять до складу молекул розчиненої речовини.

• **Коефіцієнт дисоціації** – відношення концентрації дисоційованих молекул до їхньої концентрації в розчині.

$$\alpha = \frac{n}{n_0}.$$

Задачі

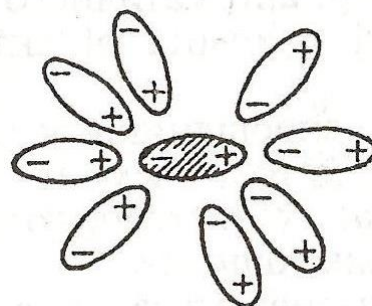
(131) **Наведемо експериментальні факти, які свідчать, що носіями електричного струму в електролітах є йони.**

Той факт, що йони в електроліті існують без прикладання до нього електричного поля довів у 1857 році Клавзіус, який показав, що якби йони утворювалися лише під впливом електричного поля (за гіпотезою Гротгуса, 1805 р.), то в електролітах струм мав би почати текти за певної напруженості поля, причому різній для різних електролітів, чого в експерименті не спостерігається. Крім того, не виконувався би закон Ома, бо зі збільшенням напруги зростала би не тільки дрейфова швидкість, а й концентрація носіїв струму. Проте закон Ома в електролітах виконується.

У 1887 році Арреніус показав, що осмотичний тиск розчиненої речовини значно більший від того, який мав би бути, якщо б молекули в розчині залишалися цілими, що означає що молекули в розчині розпадаються на дрібніші частинки – йони.

(132) **Пояснимо механізм електролітичної дисоціації.**

Відомо, що молекула води – це диполь, тому вона своїм негативним полюсом притягує позитивні йони (наприклад,



Мал. 84

натрію), а позитивним – негативні (наприклад, хлору), тим самим роз'єднуючи атом на йони (мал. 84).

(133) Виведемо формулу розчинення Оствальда та проаналізуємо її в граничних випадках.

Розглянемо бінарний електроліт. Згідно з означенням коефіцієнта дисоціації кількість недисоційованих молекул

$$n_0 - n = n_0 - \alpha n_0 = (1 - \alpha)n_0,$$

де n_0 – концентрація молекул в розчині, n – концентрація дисоційованих молекул.

Кількість актів дисоціації в одиниці об'єму за одиницю часу є пропорційною до кількості недисоційованих молекул.

$$\frac{n}{t} = A(1 - \alpha)n_0.$$

Кількість актів рекомбінації в одиниці об'єму за одиницю часу є пропорційною як до концентрації позитивних αn_0 , так і до концентрації негативних йонів αn_0 .

$$\frac{n'}{t} = B(\alpha n_0)^2.$$

У стані динамічної рівноваги

$$\frac{n}{t} = \frac{n'}{t},$$

або

$$A(1 - \alpha)n_0 = B(\alpha n_0)^2,$$

звідки

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \frac{B}{A} n_0.$$

Ми отримали формулу розчинення Оствальда, з якої видно, що якщо $n_0 \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow 1$, тобто в слабкому розчині всі молекули дисоційовані, а якщо $n_0 \rightarrow \infty$, то $\alpha \rightarrow 0$, що означає, що в сильному розчині коефіцієнт дисоціації дуже малий.

(134) Покажемо, як на основі закону електролізу Фарадея можна дослідницьким шляхом визначити заряд електрона.

Згідно з законом електролізу Фарадея маса речовини, що виділяється на одному з електродів, пропорційна до заряду q , який пройшов через електроліт.

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{z} q,$$

де F – число Фарадея, μ – молярна маса, z – валентність.

З'ясуємо фізичний зміст числа Фарадея.

З закону Фарадея

$$F = \frac{\mu q}{mz} = \frac{q}{\nu z},$$

звідки видно, що за умови $z = 1$ і $\nu = 1$ моль буде чисельна рівність між зарядом та числом Фарадея, тому число Фарадея чисельно дорівнює заряду, який має пройти через електроліт для того, щоб на електроді осів один моль одновалентної речовини, або простіше: число Фарадея дорівнює заряду одного моля одновалентних йонів.

Якщо експериментально виміряти число Фарадея, а це можна зробити за допомогою гальванометра ($F = 9,65 \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$), то зможемо визначити заряд одновалентного йона, тобто заряд електрона:

$$e = \frac{q}{N} = \frac{F\nu}{N} = \frac{F}{N_A} = \frac{9,65 \cdot 10^4}{6,025 \cdot 10^{23}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ (Кл)},$$

де послідовно застосовано принцип квантованості заряду, закон Фарадея та означення числа Авогадро.

Саме на основі цього експерименту Стоней у 1874 році вперше показав дискретність електричного заряду і дав оцінку величині елементарного заряду.

(135) Покажемо, що внаслідок нагрівання опір електролітів зменшується.

Відомо, що рух частинки під дією сталої сили та сили опору через деякий час після його початку переходить у рівномірний (задача 76) і ця швидкість рівномірного руху

$$v = \frac{F}{\alpha},$$

де F – стала сила, α – коефіцієнт опору середовища.

Щодо руху йона в електроліті з зарядом q в електричному полі з напруженістю E , ця стала сила дорівнює qE і тоді його швидкість

$$v = \frac{qE}{\alpha}.$$

Коефіцієнт опору виразимо за формулою Стокса

$$\alpha = 6\pi r \eta,$$

де η – коефіцієнт в'язкості електроліту, r – радіус йона.

Дістанемо, що дрейфова швидкість

$$v = \frac{qE}{6\pi r \eta}$$

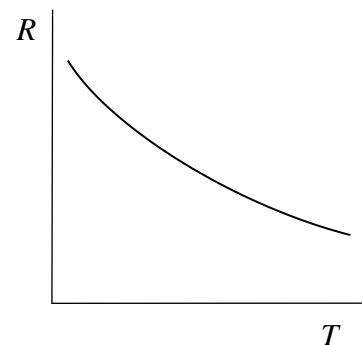
і рухливість

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{q}{6\pi r \eta}.$$

Відомо, що за нагрівання коефіцієнт в'язкості середовища зменшується, тому рухливість йонів зростає і, відповідно, зростає питома провідність, яка у випадку електроліту дорівнює сумі провідностей позитивних і негативних йонів.

$$\sigma = qn(\mu_+ + \mu_-).$$

Крім того, за нагрівання зростає коефіцієнт дисоціації і тому зростає концентрація йонів n , що також спричиняє до збільшення питомої електропровідності. Проте це зростання концентрації йонів за певної ще більш високої температури може спричинити до зменшення рухливості йонів внаслідок частіших їх зіткнень між собою, що приведе до зменшення темпу зміни опору з ростом температури, тобто опір почне зменшуватись нелінійно (мал. 85).



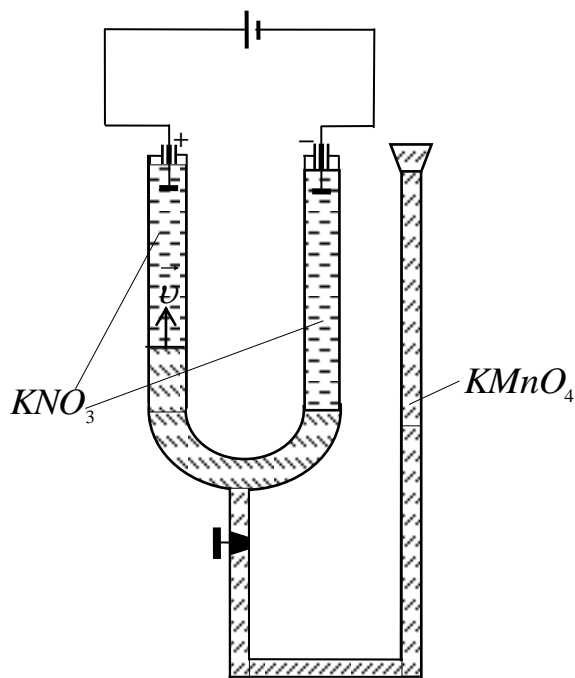
Мал. 85

(136) Доведемо експериментально, що рухливість будь-якого йона в електроліті малої концентрації не залежить від наявності в ньому інших йонів.

Для цього використаємо прилад, що показаний на мал. 86. Закривши кран в U - подібну трубку наливаємо водного розчину азотно-

кислого калію KNO_3 , який є дисоційований на йони K^+ і NO_3^- , а через лійку – водний розчин марганцевокислого калію $KMnO_4$ з йонами K^+ і MnO_4^- , який має фіолетовий колір завдяки йонам MnO_4^- . Відкривши кран і замкнувши коло, побачимо, що межа між фіолетовим і безбарвним розчином повільно рухається до анода. Очевидно, що це відбувається внаслідок руху до анода фіолетових йонів MnO_4^- . Швидкість цього руху і є дрейфовою швидкістю йонів. Якщо ж виконати цей експеримент з додаванням в U-подібну трубку крім KNO_3 ще й іншої солі, то швидкість руху межі за тієї ж напруги не зміниться, що і вказує на незалежність рухливості йонів MnO_4^- від присутності в розчині інших йонів.

Крім того, цей експеримент наочно нас переконує, що дрейфова швидкість йонів в електроліті значно менша за їхню теплову швидкість.



Мал. 86

Тема 13. Контактні явища між металами та електролітами

Фізичні поняття

- **Нормальна концентрація** – концентрація електроліту, який містить один моль йонів на один літр розчину.
- **Водневий електрод** – платиновий електрод, насичений воднем.
- **Електрохімічний потенціал** – потенціал металу відносно електроліту, в який цей метал занурений.

•**Нормальний електрохімічний потенціал** – потенціал певного металу відносно водневого електрода, якщо обидва електроди занурені в розчин солі цього металу нормальної концентрації.

Фізичні системи й прилади

•**Гальванічний елемент** – хімічне джерело ЕРС, яке працює на принципі виникнення електрохімічних потенціалів між металами та електролітами.

•**Гальванічний елемент Вольта** – гальванічний елемент, який являє собою мідний та цинковий електроди, занурені в слабкий розчин сірчаної кислоти.

•**Гальванічний елемент Даніеля** – гальванічний елемент, який являє собою мідний електрод занурений у водний розчин $CuSO_4$ та цинковий електрод, занурений у водний розчин $ZnSO_4$, причому розчини розділені пористою перегородкою, яка пропускає йони, але не пропускає води.

•**Нормальний елемент Вестона** – гальванічний ртутно-кадмієвий елемент, який має високу стабільність ЕРС і тому використовується у метрології як еталон напруги ($\mathcal{E} = 1,0192 \pm 0,0002$ В).

•**Акумулятор** – хімічне джерело ЕРС, яке, як і гальванічний елемент, працює на принципі виникнення електрохімічних потенціалів між металами та електролітами, але в якому речовини, що витрачаються, попередньо нагромаджуються на електродах за допомогою електролізу.

•**Паливний елемент** – хімічне джерело ЕРС, яке як і гальванічний елемент працює на принципі виникнення електрохімічних потенціалів між металами та електролітами, і в якому витратні речовини безперервно подаються до електродів, а відпрацьовані речовини безперервно виводяться з нього.

(137) Покажемо, якщо занурити метал у воду чи у водний розчин солі цього металу, то між металом і розчином виникає різниця потенціалів.

Справді, після занурення металу у воду чи в розчин солі цього металу, полярні молекули води своїми негативними кінцями будуть витягувати з металу позитивні йони, що порушить електронейтральність як в металі, так і в розчині – метал зарядиться негативно, а розчин – позитивно. Цей процес виходу йонів з металу припиниться, коли сила електричного поля, яке виникло, починає протидіяти виходу йонів з металу, зрівняється з силою притягання до молекул води. Настане стаціонарний стан з певною напруженістю електричного поля і відповідно певною різницею потенціалів, яка і є електрохімічним потенціалом згідно з його означенням. Для прикладу, так виникає електрохімічний потенціал якщо занурити цинк у водний розчин $ZnSO_4$. Можливий і другий випадок, коли з металу в розчин його солі виходять не позитивні йони, а вільні електрони. При цьому, очевидно, метал зарядиться позитивно, а розчин – негативно. Цей випадок має місце якщо занурити мідь у водний розчин $CuSO_4$.

Якщо зафіксувати концентрацію розчину, а саме, взяти розчин нормальної концентрації, то, очевидно, електрохімічний потенціал буде залежати лише від роду металу.

(138) Покажемо, що процес вимірювання електрохімічного потенціалу неминуче впливає на вимірювану величину.

Нехай ми маємо виміряти електрохімічний потенціал U_A між електродом A та електролітом.

Щоб виміряти цей електрохімічний потенціал, слід до вольтметра приєднати ще один електрод і занурити його в розчин (мал. 87). Але між цим електродом і розчином також виникне різниця потенціалів.

лів, яка впливатиме на результат, а саме ми вже будемо вимірювати не різницю потенціалів U_A між електродом A та розчином, а різницю потенціалів U_{AB} між двома електродами A і B .

З малюнка видно, що

$$U_{AB} = U_A + (-U_B),$$

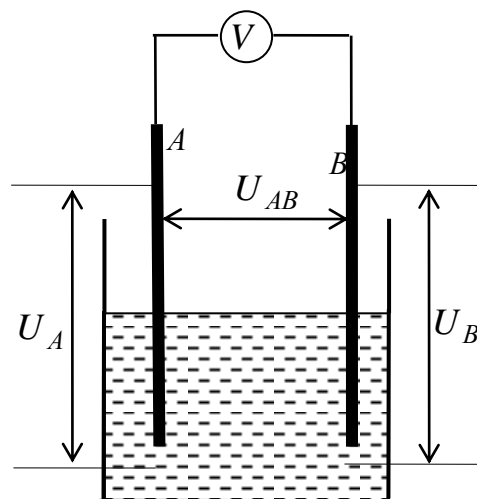
звідки електрохімічний потенціал, який ми намагаємось виміряти,

$$U_A = U_B + U_{AB}, \quad (1)$$

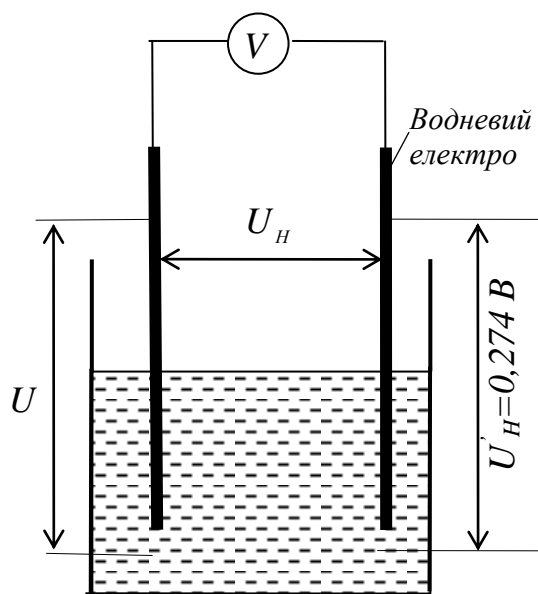
тому щоб визначити його, до показів вольтметра U_{AB} слід додати ще величину U_B , яка очевидно залежить від роду металу B . Отже цей електрод повинен бути еталонним, тобто таким, для якого відома різниця потенціалів між ним і розчином, а таким є водневий електрод. В ролі розчину, очевидно, слід взяти також еталонний розчин, а ним є розчин нормальної концентрації.

(139) Покажемо, як за допомогою еталонного водневого електрода можна вимірювати електрохімічні потенціали.

Будемо базуватися на експериментальному факті, що різниця потенціалів між водневим електродом і розчином нормальної концентрації йонів водню $U'_H = +0,274 \text{ В}$ (мал. 88). Отже, щоб виміряти електрохімічний потенціал між певним електродом та



Мал. 87



Мал. 88

розчином його солі нормальної концентрації U до показів вольтметра U_H слід згідно з формулою (1) додати величину $U'_H = +0,274$ В, тобто $U = U_H + 0,274$ В.

Отже, маючи за еталон водневий електрод, ми можемо вимірювати електрохімічні потенціали будь-яких металів відносно розчинів їхніх солей нормальної концентрації. Дані цих вимірювань для деяких електродів показані в таблиці. Зверніть увагу, що електрохімічні потенціали є як позитивні, так і негативні, що підтверджує той факт (задача 127), що в електроліт з металу можуть виходити не тільки позитивні йони, а й вільні електрони.

Таблиця

Електрохімічні потенціали деяких металів

Електрод	U_H , В	U , В	Електрод	U_H , В	U , В
водневий	0	+0,274	<i>Pb</i>	-0,12	+0,15
<i>Na</i>	-2,72	-2,45	<i>Hg</i>	+0,86	+1,13
<i>K</i>	-2,92	-2,65	<i>Cu</i>	+0,34	+0,61
<i>Mg</i>	-1,55	-1,28	<i>Ag</i>	+0,80	+1,50
<i>Zn</i>	-0,77	-0,50	O_2	+1,23	1,63
<i>Cd</i>	-0,40	-0,13	Cl_2	+1,36	+1,50

(140) Покажемо, що в замкненому колі з послідовно з'єднаними металами та електролітами, різниця потенціалів між будь-якими з них не дорівнює нулеві (на відміну від замкнутого кола складеного з металів), тобто в такому колі виникає ЕРС.

Розглянемо практичний випадок, коли цинковий та мідний електроди занурені в слабкий розчин сірчаної кислоти (H_2SO_4). Якщо з'єднати між собою електроди, то різниця потенціалів між будь-якими точками кола не дорівнюватиме нулеві як у випадку кола, складеного з металів (задача 119), тобто в колі буде ЕРС

$$\mathcal{E} = U_{Cu} + (-U_{Zn}),$$

яка згідно з таблицею електрохімічних потенціалів у випадку нормальної концентрації розчину сірчаної кислоти

$$\mathcal{E} = 0,61 + 0,50 = 1,1 \text{ (В)}.$$

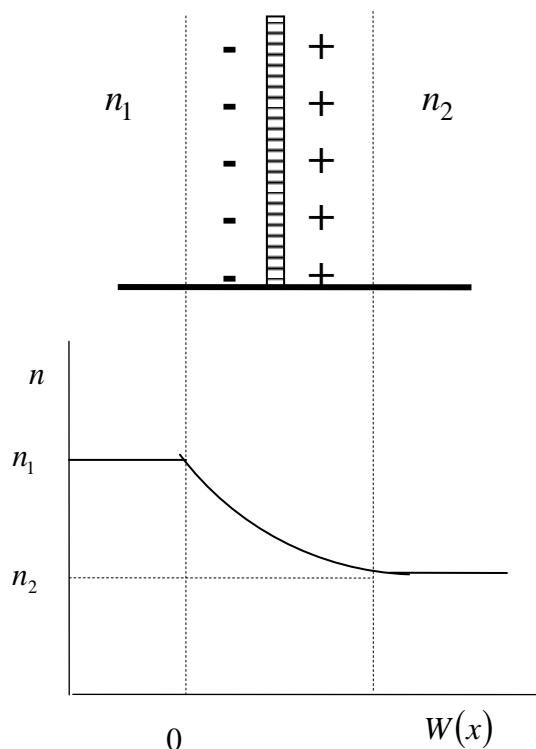
Такий гальванічний елемент називається елементом Вольта.

(141) Покажемо, що між двома електролітами різних концентрацій, розділених пористою перегородкою, виникає різниця потенціалів, і встановимо вираз для цієї різниці потенціалів (формулу Нернста).

Розглянемо електроліт з зарядом йона q , розділений пористою перегородкою, яка пропускає лише один тип йонів, наприклад, позитивні йони і не пропускає розчинника (води). Нехай з одного боку цієї перегородки концентрація електроліту n_1 , а з іншого n_2 ($n_1 > n_2$) (мал. 89).

Під тиском, який є більшим у тому електроліті, де більша концентрація, позитивні йони (йони металу) будуть переходити через перегородку в електроліт з меншою концентрацією. При цьому очевидно, що електронейтральність в обидвох електролітах порушиться, спричинивши виникнення електричного поля і різниці потенціалів.

Установимо залежність цієї різниці потенціалів від концентрації електролітів. Для цього до області з порушеною електронейтральністю застосуємо розподіл Больцмана (за потенціальною енергією)



Мал. 89

$$n = n_1 e^{-\frac{W(x)}{kT}},$$

де $W(x)$ – потенціальна енергія йонів залежно від відстані від початку області порушеної електронейтральності (за нуль потенціальної енергії взято потенціальну енергію на початку цієї області).

Проте такий процес переходу не триватиме до повного вирівнювання концентрацій – він закінчиться, коли сила електричного поля, яке виникло, вирівнюється з силою тиску. Тому порушення електронейтральності та концентрацій станеться в невеликій області біля перегородок, а на більших відстанях від неї концентрації залишаться такі, які були до того. На цій відстані в другому електроліті концентрація буде n_2 , а потенціальна енергія $W = q\varphi$ згідно з означенням потенціалу. Підставивши ці величини в розподіл Больцмана, дістанемо

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{q\varphi}{kT}},$$

звідки

$$\varphi = \frac{kT}{q} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

Ми отримали формулу Нернста. Бачимо, що ця формула для однозарядного йона ($q = e$) ідентична до формули для внутрішньої різниці потенціалів на контакті двох металів (задача 117). Очевидно, що і вивід формули Нернста можна зробити на основі міркувань, викладених під час виводу згаданої формули для внутрішньої контактної різниці потенціалів для двох металів, а саме прирівнявши силу тиску йонного газу до сили, яка діє на йони з боку електричного поля, яке виникло внаслідок переходу частини йонів в електроліт з меншою концентрацією.

Розглянутий випадок двох електролітів різної концентрації розділених пористою перегородкою є практичним, оскільки він моделює виникнення трансмембранної різниці потенціалів в клітині живого організму.

Тема 14. Електричний струм в газах. Плазма

Фізичні явища

- **Несамостійний газовий розряд** – явище протікання струму в газі лише за наявності йонізатора (проміння чи джерела тепла).
- **Самостійний газовий розряд** – розряд, який продовжується після виключення йонізатора.
- **Вторинна електронна емісія** – явище виходу електронів з катода внаслідок його бомбардування позитивними йонами.

Фізичні поняття

- **Струм насичення** – це максимальна незалежна від напруги сила струму.
- **Дебаєвська довжина** – це лінійний розмір (довжина ребра куба чи діаметр кулі) такої області в йонізованому газі, в якій потенціальна енергія електрона за повного розділення позитивних та негативних зарядів приблизно дорівнює енергії теплового руху (позначення δ).
- **Плазма** – йонізований газ для якого дебаєвська довжина мала порівняно з розмірами області яку займає газ. Це означення плазми дав Ленгмюр.
- **Ізотермічна плазма** – плазма в якій температури електронного та йонного газів однакові ($T_e = T_{\text{и}}$)
- **Неізотермічна плазма** – плазма в якій температури електронного та йонного газів різні ($T_e \neq T_{\text{и}}$).

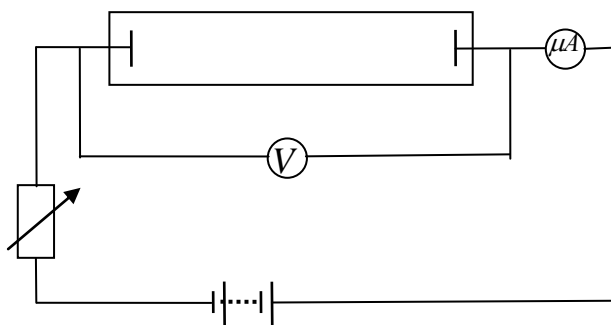
Задачі

(142) Установимо залежність густини струму насичення від швидкості генерації йонів та довжини трубки, і покажемо, що за несамотійного розряду за малих напруг виконується закон Ома, а за великих напруг струм досягає насичення.

Очевидно, що газ як речовина, у якій немає вільних електричних зарядів, не проводить електричного струму. Проте за нагрівання або опромінення ультрафіолетовим чи Х-промінням внаслідок йонізації він стає провідним і в колі з газовою трубкою потече струм (мал. 90).

Швидкість генерації йонів йонізатором – це кількість пар йонів, що виникає в одиниці об'єму за одиницю часу, або концентрація пар йонів, що виникає за одиницю часу. Згідно з цим означенням, позначивши цю величину β , маємо

$$\beta = \frac{N}{Vt} = \frac{n}{t}.$$



Мал. 90

Але внаслідок рекомбінації в одиниці об'єму за одиницю часу зникає певна кількість пар йонів, яку позначимо β_1 і назовемо швидкістю рекомбінації, і яка, очевидно, пропорційна до концентрації позитивних n_+ і до концентрації негативних n_- – йонів.

$$\beta_1 = \alpha n_+ n_- = \alpha n^2$$

де α – коефіцієнт пропорційності.

Крім того, за наявності струму в одиниці об'єму за одиницю часу зникає певна кількість пар йонів β_2 (це йони, які осіли на електродах). Знайдемо вираз для цієї швидкості зникнення йонів.

$$\beta_2 = \frac{N_2}{Vt} = \frac{N_2 I}{Slq} = \frac{I}{Sle} = \frac{j}{el},$$

де S і l – відповідно площа поперечного перерізу та довжина трубки. При виведенні цієї формули застосовано означення швидкості зникнення йонів, означення сили струму, принцип квантованості заряду та означення густини струму.

За умови рівноваги швидкість генерації йонів має дорівнювати сумі швидкостей їх рекомбінації та зникнення, тобто

$$\beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Підставивши сюди знайдені вирази для β_1 і β_2 , дістанемо

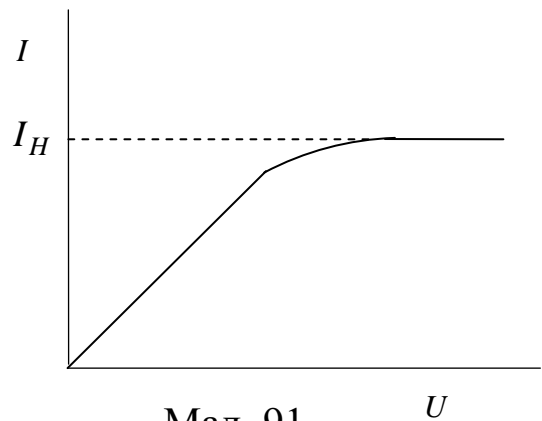
$$\beta = \alpha n^2 + \frac{j}{el}. \quad (1)$$

За малих густин струму $\frac{j}{el} \ll \alpha n^2$ і тому

$$n = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

звідки видно, що концентрація є сталою величиною і відповідно питомою провідністю

$$\sigma = e \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (\mu_+ + \mu_-),$$



Мал. 91

де μ_+ і μ_- – рухливості відповідно позитивних і негативних йонів, також є сталою величиною, що свідчить про лінійну залежність густини струму від напруженості електричного поля

$$j = \sigma E,$$

тобто про виконання закону Ома.

За великих густин струму $\frac{j}{el} \gg \alpha n^2$, тому нехтуючи першим доданком у формулі (1), дістанемо

$$j = e\beta l,$$

звідки бачимо, що густина струму буде сталою, тобто струм досягне насичення.

Зауважимо, що експериментальна ВАХ несамоостійного розряду (мал. 91) підтверджує ці висновки: спочатку вона лінійна згідно з законом Ома, а потім досягає насичення.

(143) Установимо часову залежність концентрації йонів у газорозрядній трубці після вимкнення йонізатора.

Зменшення концентрації йонів за одиницю часу пропорційне до концентрації і позитивних і негативних йонів, тобто

$$\frac{dn}{dt} \sim n_+ n_- = \alpha n^2,$$

або

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha n^2,$$

де α – коефіцієнт рекомбінації, а знак «–» вказує на зменшення концентрації. Представимо останню рівність у вигляді

$$\frac{dn}{n^2} = -\alpha dt$$

і проінтегруємо. Отримаємо

$$-\frac{1}{n} = -\alpha t + C.$$

У початковий момент часу $t = 0$, $n = n_0$ тому $C = -\frac{1}{n_0}$ і останнє рівняння набуває вигляду

$$n = \frac{n_0}{1 + \alpha n_0 t}.$$

(144) Встановимо залежність сили струму та потоку електронів від відстані в електронній лавині, яка має місце в самостійному розряді.

Розглянемо самостійний розряд, тобто розряд, який продовжується після виключення йонізатора. Це відбувається внаслідок йонізації атомів електронами, які вийшли з катода. Своєю чергою ці електрони вийшли з катода внаслідок його бомбардування позитивними йонами, які утворилися через йонізацію атомів електронами. У результаті розряд підтримує сам себе вже без зовнішнього йонізатора: на місце електронів, які пішли до анода, приходять нові – ті, які вийшли з катода.

Нехай катод емітує за одиницю часу $n_0 = \frac{N_0}{t}$ електронів, які рухаючись в електричному полі, йонізують молекули газу причому кожен електрон створює на одиниці довжини свого шляху α нових електронів і йонів (α пар електрон-йон), тобто

$$\alpha = \frac{1}{N} \frac{dN}{dx},$$

де dN – загальна кількість електронів на відстані dx (приріст електронів на відстані dx), N – загальна кількість електронів на відстані x від катода.

Приріст електронів dN на відстані dx приведе до приросту сили струму dI . Тоді $\frac{dI}{dN}$ – сила струму, створена одним електроном і

$$\frac{dI}{dN} N = I(x),$$

сила струму на відстані x . Підставивши сюди вираз для α , дістанемо

$$\frac{dI}{I} = \alpha dx,$$

звідки після інтегрування

$$\ln I = \alpha x + C$$

Біля катода, тобто за умови $x = 0$ сила струму $I = I_0$, тому після підстановки цих початкових умов в останнє рівняння дістаємо, що $C = \ln I_0$ і отримуємо залежність сили струму від відстані

$$I = I_0 e^{\alpha x}.$$

Виразимо I_0 і I через відповідні потоки електронів n_0 і n .

$$I_0 = \frac{q_0}{t} = \frac{eN_0}{t} = en_0.$$

Аналогічно

$$I = en.$$

Підставивши дві останні рівності у залежність сили струму від відстані, дістанемо залежність потоку електронів від відстані

$$n = n_0 e^{\alpha \cdot x}.$$

Зауважимо, що буквою n тут позначено потік електронів $n = \frac{N}{t}$ (кількість електронів які проходять через поперечний переріз за одиницю часу), що не слід плутати з концентрацією яку позначають тією ж буквою $n = \frac{N}{V}$ (кількість електронів в одиниці об'єму).

(145) Установимо умову самостійного розряду, тобто умову, за якої струм буде підтримуватися у відсутності зовнішнього йонізатора.

Очевидно, що незалежно від того, яким способом вибиваються електрони з катода, їхній потік описується рівнянням (задача 144)

$$n(x) = n_0 e^{\alpha \cdot x},$$

звідки потік біля анода

$$n(l) = n_0 e^{\alpha \cdot l},$$

де l – довжина трубки, n_0 – кількість електронів, вибитих йонами з катода за одиницю часу.

Ці йони з'являються внаслідок потоку електронів $n(l)$. Їх кількість – це кількість нових пар електрон-йон за одиницю часу на відстані l , яка, очевидно, дорівнює

$$n - n_0 = n_0 e^{\alpha \cdot l} - n_0 = n_0 (e^{\alpha \cdot l} - 1)$$

Але кількість вибитих електронів не обов'язково дорівнює кількості йонів, які обрушилися на катод, тому кількість вибитих електронів буде

$$n_0 (e^{\alpha \cdot l} - 1)$$

де γ – коефіцієнт пропорційності, який показує, скільки електронів вибиває один йон (зверніть увагу, що коефіцієнт α навпаки показує, скільки йонів на одиниці довжини спричиняє один електрон). Для того, щоб підтримувався струм, ця кількість вибитих електронів має бути не меншою n_0 , тобто

$$m_0(e^{\alpha \cdot l} - 1) \geq n_0,$$

звідки отримуємо умову самостійного розряду

$$\gamma(e^{\alpha \cdot l} - 1) \geq 1.$$

Очевидно, що коефіцієнти γ і α залежать від прикладеної напруги, тому ця умова буде виконана за певної напруги – напруги запалювання газового розряду.

Розглянута тут теорія належить Дж-Тавзенду. Очевидно, що в ній не все враховано, а саме:

- а) електрони можуть вибиватися з катода не тільки йонами а й випромінюванням самого розряду, тобто за допомогою фото-ефекту;
- б) електрони можуть не тільки вибиватися з катода, а й з'являтися в об'ємі трубки внаслідок зіткнень атомів з позитивними йонами;
- в) електричне поле між катодом і анодом не є однорідним внаслідок зарядів які виникають в усьому об'ємі трубки.

(146) Покажемо, що за низького тиску плазма є ближчою до неізо-термічної, а за високого – до ізотермічної.

За низького тиску число зіткнень за одиницю часу електронів з йонами невелике, а оскільки вони обмінюються енергією з йонами порціями (квантами) то за певної ймовірності обміну в одному зіт-

кненні, інтенсивність цього обміну незначна. Таким чином електронна температура є вищою за йонну.

За умови високого тиску внаслідок більшої кількості зіткнень електронів з йонами інтенсивність обміну енергією між електронами та йонами зростає, що спричиняє до їх вирівнювання і, відповідно, до вирівнювання йонної та електронної температур.

З класичної точки зору це виглядає так, що в одному акті зіткнення електрона з йоном швидкість електрона зменшується згідно з законами збереження імпульсу та кінетичної енергії, звідки, внаслідок великої різниці мас електрона і йона, на величину приблизно $2v_{iy}$, де v_{iy} – швидкість йона, тобто на незначну величину.

Тому за низького тиску внаслідок малої частоти зіткнень це зменшення незначне і температура електронного газу залишається вищою за температуру йонного, а за високого тиску, внаслідок значної частоти зіткнень швидкість електрона зменшуючись у кожному зіткненні може зменшитись до такої величини, що його середня кінетична енергія спаде до кінетичної енергії йонів, що означатиме рівність електронної та йонної температур.

(147) Встановимо зв'язок дебаївської довжини з температурою та концентрацією заряджених частинок одного знаку.

Згідно з означенням дебаївської довжини прирівняємо потенціальну енергію електрона до енергії теплового руху

$$eU = kT,$$

де, очевидно, U – це різниця потенціалів між поверхнями області повного розділення зарядів, тобто різниця потенціалів на дебаєвській довжині. Тоді за формулою зв'язку напруженості й потенціалу

$$eE\delta = kT_e, \tag{1}$$

де T_e – електронна температура.

Очевидно, що напруженість електричного поля E залежить від концентрації заряджених частинок, тому виразимо напруженість електричного поля через концентрацію. Для цього застосуємо теорему Остроградського–Гауса у диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Вважаючи заряджені частинки однозарядними, об'ємну густину заряду представимо як

$$\rho = \frac{Ne}{V} = ne,$$

а дивергенцію вектора \vec{D} наближеним виразом

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{D}{\delta}.$$

Тоді теорема Остроградського–Гауса буде мати вигляд

$$\frac{D}{\delta} = ne$$

або

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\delta} = ne,$$

звідки

$$E = \frac{ne\delta}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Підставивши цей вираз для E в рівність (1) остаточно отримаємо

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{n e^2}}.$$

Слід зауважити, що взагалі температури електронного та йонного газів у плазмі не однакові. Як правило електронна температура T_e є вищою за йонну T_i . Згадаймо подібну ситуацію для електронного та йонного «газу» в металах.

З останньої формули та Ленгмюрового означення плазми бачимо, що стан плазми досягається за високих температур та малих концентрацій заряджених частинок.

(148) На основі припущення про флуктуації заряду в плазмі та виразу для дебаївської довжини встановимо вираз для плазмової (ленгмюрової) частоти.

Плазмову частоту ω_0 знайдемо як величину обернену до часу життя областей повного розділення зарядів τ . Оскільки розмір цих областей є дебаївською довжиною, то

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{v_e}{\delta},$$

де v_e – середня квадратична швидкість електронів. Підставивши ви-

раз для цієї швидкості $v_e = \sqrt{\frac{3kT_e}{m_e}}$, а також вираз для дебаївської довжини (задача 147) дістанемо

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3ne^2}{\varepsilon \varepsilon_0 m_e}}.$$

(149) Вважаючи рух електрона в плазмі під дією електричного поля рівномірним, покажемо, що для струму в плазмі викону-

ється закон Ома і встановимо вираз для питомої електропровідності плазми.

Будемо також вважати, що електропровідність плазми визначається електропровідністю електронів оскільки їх рухливість значно більша за рухливість йонів.

Дійсно, рівномірність напрямленого руху електронів вздовж електричного поля в плазмі можна довести подібно як це зроблено для електронів в металах (задача 76). А за рівномірного руху як впливає з основного рівняння динаміки сума сил, що діють на електрон дорівнює нулеві. Оскільки, на електрон діють лише дві сили: сила електричного поля eE та сила опору F_{on} які направлені протилежно, то

$$eE = F_{on}. \quad (1)$$

Силу опору F_{on} знайдемо з тих міркувань, що в кожному зіткненні електрон цілком втрачає свій імпульс напрямленого руху, подібно до того, як це є для електронного газу в металі, згідно з постулатом класичної теорії електропровідності металів (тема 6), тобто імпульс електрона зменшується на величину $m_e u$, де u – швидкість напрямленого руху електрона під дією електричного поля (зауважте, що в задачі 146 коли йшлося про зменшення швидкості електрона на $2v_{\bar{u}}$ то йшлося про швидкість хаотичного руху електрона).

Тепер, застосувавши основне рівняння динаміки у формі, де зміна імпульсу матеріальної точки дорівнює імпульсу сили, можемо написати

$$F_{on}\tau = m_e u$$

де τ – середній час між двома зіткненнями електрона з йоном, звідки

$$F_{on} = \frac{m_e u}{\tau}.$$

Підставивши цей вираз в (1) дістанемо

$$u = \frac{eE\tau}{m_e}$$

і для густини струму

$$j = enu = \frac{e^2 n \tau}{m_e} E.$$

Останнє рівняння, як бачимо, є законом Ома для плазми, де величина

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e},$$

це її питома електропровідність.