Міністерство освіти і науки України

Юрій Угрин, Роман Пелещак, Володимир Штим

Опис електромагнетних явищ способом розв'язування задач

2014

Юрій Угрин, Роман Пелещак, Володимир Штим. Опис електромагнетних явищ способом розв'язування задач.

Рекомендовано до друку: *Рекомендовано до друку Міністерством освіти і науки України (протокол № 1/11 – 12205 від 30.07. 2013 р).*

Основу цього посібника складає матеріял з курсу загальної фізики, частина «Електрика та магнетизм». Текст представлений у вигляді задач, розв'язки яких базуються на означеннях, постулатах та результатах попередніх задач. Всі фізичні означення покласифіковані на означення фізичних явищ, фізичних величин, фізичних понять, фізичних систем і приладів.

Посібник призначений для студентів які навчаються за напрямом підготовки «фізика».

Рецензенти:

Завідувач кафедри фізики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського, професор, доктор фізико-математичних наук **Гохман О. Р.**

Завідувач кафедри мікро- та наноелектроніки Запорізького національного технічного університету, доктор фізико-математичних наук, професор **Погосов В.В.**

Декан Інституту фізики, математики та інформатики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка доктор фізико-математичних наук, професор **Бойчук В.І.**

Відповідальний за випуск: професор **Пелещак Р.М.**

Зміст

Передмова

Нема сумніву в тому, що кожен з нас в процесі навчання мав проблему, яка полягала в тому, що ми змушені читати якийсь текст, але невідомо з якою метою, а точніше відомо, – з якою – з метою його вивчення, проте ця мета здавалася нам надто неприродною. Дійсно, читати щось тільки тому, що це «щось» слід вивчити – дуже нудне заняття. Значно цікавіше шукати відповіді на конкретні питання.

Саме з метою зміни пізнавальної частини мотивації навчання фізики, ми зробили спробу укласти програмний матеріал з курсу електромагнетизму інакше, а саме, розділивши його на конкретні задачі. Базою для розв'язання цих задач служать означення, постулати та попередні задачі. Своєю чергою, всі означення по класифіковані на: 1) означення фізичних явищ чи процесів; 2) означення фізичних понять; 3) означення фізичних величин та 4) означення фізичних систем чи приладів. Задачі мають суцільну нумерацію. Крім того, в кінці підручника дано перелік усіх означень та задач і вказано сторінку. Тому, якщо ви шукаєте відповідь на якесь питання, то зорієнтувавшись до якої теми ця проблема могла б належати, шукаєте відповідну задачу з переліку задач. Так само можна знайти і будь-яке означення.

Саме задачі складають основний матеріал посібника. Тут задачі – це те, що традиційно називають фактичним матеріалом, причому поняття задачі є досить широким – це і виведення формули, і доведення певного твердження, отриманого як теоретичним, так і експериментальним шляхом, і доведення існування якогось явища чи процесу, а також роз'яснення методики конкретного експерименту.

Суцільною нумерацією задач ми підкреслюємо умовність поділу електромагнетизму (як і всієї фізики і будь-якої науки) на частини, розділи та теми. Насправді, електромагнітні явища чи будь-які явища природи не слідують цьому нашому поділу, який ми зробили дещо штучно для того щоб полегшити їх сприйняття. Будь-яке явище природи – це сукупність (чи система) багатьох, а можливо і всіх явищ з цього нашого штучного переліку явищ. Наприклад, блискавка – це явище оптичне, електростатичне, магнетне, теплове і механічне водночас. Насправді наука не поділяється на частини, розділи, параграфи і т. д., вона єдина і всеохоплююча, а цей поділ, очевидно, виник через те, що людина неспроможна осягнути науку всю і одразу.

У посібнику дуже рідко трапляється нумерація формул. Виявляється, що вона і не потрібна, бо формула, на яку спираємось, є результатом однієї з попередніх задач, тому посилання відбувається на цей результат, тобто на задачу.

Звертаємо вашу увагу і на те, що не обов'язково певну тему починати читати з початку, тобто з означень, можна починати і з задач, а до означень чи постулатів повертатись при потребі. Деякі задачі можна читати виокремленими з контексту, а деякі – ні, оскільки вони базуються на результатах попередніх задач.

У цьому посібнику ви також можете знаходити відповіді на ті питання, які у вас виникли в ході читання підручників, наприклад ви не змогли з'ясувати чому дрібні предмети притягаються до наелектризованих тіл. Тоді припускаючи, що це явище електростатичне в переліку задач розділу I знаходите задачу під номером 17: «поясніть явище притягання дрібних частинок до наелектризованих тіл». Тут же вказана сторінка на якій є розв'язок цієї задачі.

Очевидно також, що не варто пропускати якісь задачі, але, якщо вже це робите, то слід це робити розумно, тобто логічно чи інтуїтивно переконатися, що ця задача є «тупиковою», тобто такою, на якій не базуються інші задачі в межах цього посібника.

Звертаємо вашу увагу на те, що в цій книзі написання деяких фізичних термінів може бути не звичним проте, очевидно, що якщо є «магнетизм», «магнетик», «магнетит» то має бути і «магнетне поле», або якщо є «матерія» чи «потенція» то має бути «матерял» чи «потенціял». Для написання фізичних термінів ми послуговувалися словником фізичної лексики за авторства В. Козирського та В. Шендеровського, виданому в 1996 році.

Розділ I. Електростатика

Тема 1. Електричний заряд

Фізичні поняття

- **Електричний заряд –** це електрична властивість речовини (так як маса є гравітаційною та інерційною властивістю речовини). Поняття електричного заряду є одним з фундаментальних понять електромагнетизму.
- **Елементарний заряд** – це найменший відомий на нинішній день заряд у природі.

Фізичні величини

- **Електричний заряд,** будучи фізичним поняттям, водночас є фізичною величиною. Позначається буквою q і вимірюється в Кулонах (Кл). Зміст цієї величини вимірювання буде зрозумілим після ознайомлення з такою фізичною величиною, як сила електричного струму.
- **Лінійна, поверхнева чи об'ємна густина заряду –** це відношення заряду відповідно до відстані, площі чи об'єму, в якому він є (позначення відповідно λ, σ, ρ).

$$\lambda \equiv \frac{dq}{dl};$$

$$\sigma \equiv \frac{dq}{dS};$$

$$\rho \equiv \frac{dq}{dV}.$$

Постулати

- **Закон збереження електричного заряду:** алгебраїчна сума зарядів, які виникають на всіх тілах, що беруть участь у певному процесі, дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, яка була на цих тілах до початку цього процесу.

Прикладами таких процесів є: тертя бурштину до шерсті, заряджження електрофорної машини, хімічні та ядерні реакції.

- **Принцип інваріянтності заряду:** величина заряду не залежить від того, у якій інерційній системі відліку він виміряний (інакше величина заряду не залежить від його швидкості).
- **Принцип квантованості заряду:** будь-який заряд складається з цілого числа елементарних зарядів.

Задачі

(1) **Вкажемо на один з методів перевірки принципу інваріянтності заряду.**

Для того, щоб перевірити цей принцип, можна порівняти величину заряду електрона в атомах, де вони рухаються з різними швидкостями. Для цього вимірюють ступінь електронейтральності цих атомів. Дійсно, якщо би заряд електрона залежав від його швидкості, наприклад, збільшувався б зі збільшенням швидкості, то в тих атомах, де електрони рухаються з більшою швидкістю, електронейтральність порушувалася б сильніше, ніж у тих, де електрони рухаються повільніше. Оскільки подібної чи будь-якої іншої зміни електронейтральності не зафіксовано (принаймні до швидкостей, що дорівнюють половині швидкості світла у вакуумі), то можна стверджувати, що величина заряду електрона не залежить від його швидкості.

(2) **Покажемо, що сила гравітаційного притягання електрона до ядра в атомі водню не спроможна втримати електрон в атомі, тому повинна існувати ще одна сила негравітаційної природи.**

Справді, оскільки ядро атома водню – це протон, то сила гравітаційної взаємодії між протоном і електроном

$$F = G\frac{m_e m_p}{r^2}.$$

Знайдемо енергію йонізації атома E як роботу, яку слід виконати проти сил притягання до ядра, щоб перенести електрон з точки, що на відстані r від ядра, у нескінченність. Оскільки це робота змінної сили, то

$$E = A = \int_r^\infty dA = \int_r^\infty F dr = \int_r^\infty G\frac{m_e m_p}{r^2} dr = G m_e m_p \left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty =$$

$$= G\frac{m_e m_p}{r} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}}{5{,}3\cdot 10^{-8}} = 1{,}9\cdot 10^{-61}\ (\text{Дж}).$$

Порахуємо, за якої температури атом водню буде йонізований, тобто його енергія теплового руху, що дорівнює $\frac{3}{2}kT$, дорівнюватиме енергії йонізації

$$E = \frac{3}{2}kT,$$

звідки

$$T = \frac{2E}{3k} = \frac{2\cdot 1{,}9\cdot 10^{-61}}{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}} = 9{,}2\cdot 10^{-37}\ \text{К},$$

що означає, що практично за всіх температурах водень повинен бути йонізованим, чого, насправді, немає.

Ця суперечність спонукає нас думати, що крім гравітаційної сили мусить існувати ще якась, значно більша сила, яка притягає електрона до ядра. Це сила електричного притягання. І існує вона завдяки тому, що електрон і протон, крім маси, мають ще одну властивість, яка називається електричний заряд, або коротко – заряд.

(3) **Установимо, який заряд на сьогодні є елементарним.**

Оскільки найменший експериментально встановлений (на сьогодні) заряд у природі – це заряд електрона ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл) то є всі підстави вважати його елементарним електричним зарядом. З іншого боку, теорія кварків стверджує, що електрон складається з двох кварків з зарядами $-\frac{2}{3}|e|$ та $-\frac{1}{3}|e|$, даючи сумарно заряд $-|e|$. Проте, доки це не встановлено експериментально, ми не можемо стверджувати, що заряд кварка є елементарним зарядом. Таким чином, будемо вважати, що елементарним зарядом є заряд електрона.

Тема 2. Закон Кулона

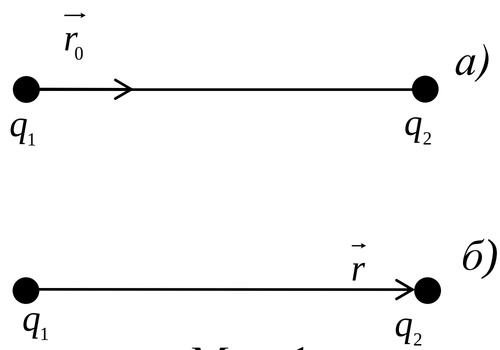
Фізичні поняття

•**Точковий заряд** – це заряджене тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах певної задачі**.**

Постулати

➢ **Закон Кулона:** два точкові заряди взаємодіють з силою прямо пропорційною до величини цих зарядів та обернено пропорційною до квадрата відстані між цими зарядами, і спрямованою вздовж прямої, що їх з’єднує

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r_0}. \qquad (1)$$



Мал. 1

У цьому аналітичному тлумаченні закону Кулона $\vec{r_0}$ – це одиничний вектор, спрямований від одного заряду до іншого (мал. 1 (а)).

Закон Кулона можна подати і так:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}, \qquad (2)$$

де $\vec{r}$ – вектор, що з’єднує заряди (мал. 1 (б)).

Очевидно, що закон Кулона у формі (1) цілком тотожний закону Кулона у формі (2). Справді напрям вектора $\vec{F}$ у першому та другому записі однаковий: він спрямований туди ж, куди і вектор $\vec{r_0}$ чи $\vec{r}$, якщо заряди однойменні, і протилежний до нього, якщо заряди різнойменні. Щодо модуля вектора $\vec{F}$, то він однаковий в обидвох формулах запису і становить:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Задачі

(4) **Установимо одиницю фізичної величини *k*.**

Із закону Кулона маємо

$$k = \frac{F \cdot r^2}{q_1 q_2},$$

тому

$$[k] = \left[\frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}\right].$$

Часто сталу k представляють через іншу сталу, а саме

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

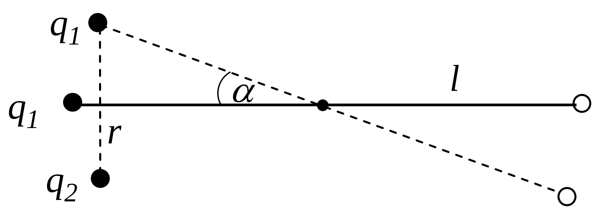
де ε_0 – електрична стала.

Бачимо, що одиниця електричної сталої обернена до одиниці сталої *k*, тобто

$$[\varepsilon_0] = \left[\frac{Кл^2}{Н \cdot м^2}\right] = \left[\frac{Ф}{м}\right].$$

(5) **Вкажемо на ідею визначення електричної сталої** ε_0.

Електричну сталу можна визначити із закону Кулона, експериментально вимірявши силу взаємодії між двома точковими (або кулястими) зарядами. Це можна зробити за допомогою тих самих крутильних терезів, якими Генрі Кавендіш виміряв гравітаційну сталу. На мал. 2 схематично показано вид згори на крутильні терези. Якщо до заряду q_1 піднести закріплений заряд q_2 того ж знаку, то нитка терезів закрутиться на кут α, який, як відомо, є пропорційним до моменту сили кручення $M = D\alpha$, де D – коефіцієнт пропорційності, який для кожного приладу є відомим.



Мал. 2

Коли момент сили кручення нитки зрівняється з моментом сили відштовхування зарядів, кулька зупиниться. Умова рівності цих моментів сил

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} l = D \cdot \alpha.$$

З цієї рівності отримаємо:

$$\varepsilon_0 = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot l}{4\pi r^2 D \cdot \alpha}.$$

Усі величини у правій частині рівності можна виміряти експериментально.

Тема 3. Електричне поле і його напруженість

Фізичні поняття

- **Електричне поле** – це субстанція, яка створюється електричними зарядами і виявляє себе за дією на електричний заряд.

Як бачимо, заряд є водночас і джерелом поля, і тим інструментом, який виявляє присутність електричного поля.

- **Пробний заряд** – це позитивний точковий заряд, який служить для виявлення та вимірювання електричного поля.

Очевидно, що реальний пробний заряд, крім дуже малих розмірів, повинен мати і дуже малу величину, бо інакше, будучи джерелом ще одного поля, він спотворюватиме досліджуване поле.

- **Лінія напруженості електричного поля (чи силова лінія)** – це лінія у кожній точці якої вектор напруженості поля дотичний до цієї лінії, або, інакше, – це лінія, вздовж якої рухається пробний заряд, на який не діють жодні сили, крім сил електричного поля.

Фізичні величини

- **Напруженість електричного поля в заданій точці простору** – це відношення сили, яка діє з боку цього поля на пробний заряд, поміщений в цю точку до величини цього заряду (позначення $\vec{E}$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

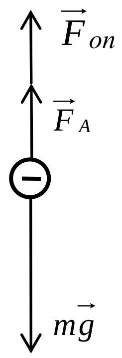
З цього означення бачимо, що оскільки сила є вектором, то і напруженість є вектором. Крім того вектор $\vec{E}$ спрямований туди ж, куди і вектор $\vec{F}$.

(6) **Знайдемо заряд електрона в ході мисленнево проведеного досліду Мілікена (1909 р).**

Ідея досліду Мілікена полягає в тому, щоб знайти зміну заряду попередньо зарядженої краплі оливи в йонізованому повітрі.

Для цього спочатку виміряємо заряд краплі в звичайному повітрі q, а потім – в йонізованому q'.

Щоб виміряти заряд краплі, слід виміряти коефіцієнт опору при русі краплі в повітрі за відомою методикою.



Мал. 3

На краплю, яка падає у повітрі, діють три сили: сила тяжіння mg, сила Архімеда $F_A = \rho gV$ та сила опору повітря $F_{on} = r\upsilon$, де r – коефіцієнт опору (мал. 3). Дві перші з цих сил постійні і лише третя зростає зі збільшенням швидкості, тому в міру її збільшення буде зростати і сила опору. Через певний час після початку падіння ця сила разом із силою Архімеда, які діють вгору, зрівноважать силу тяжіння і рух перейде в рівномірний

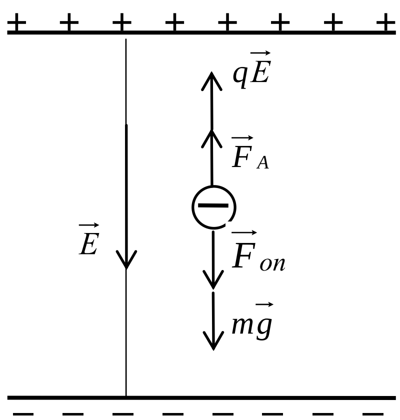
$$F_A + F_{on} = mg,$$

або

$$\rho gV + r\upsilon = mg,$$

звідки знаходимо коефіцієнт опору

$$r = \frac{mg - \rho gV}{\upsilon}. \qquad (1)$$



Мал. 4.

Далі зробимо такий самий експеримент, але в електричному полі, напрямленому вниз. Тепер негативно заряджена крапля буде рухатися рівномірно вгору зі швидкістю u (мал. 4). Напишемо основне рівняння динаміки і для цього випадку

$$qE + \rho gV = mg + ru.$$

З цієї рівності та рівності (1), враховуючи, що $m = \rho_0 V$, де ρ_0 – густина оливи, дістанемо

$$q = \frac{gV}{E}(\rho_0 - \rho)\left(1 + \frac{u}{\upsilon}\right).$$

Усі величини в правій частині цієї рівності досить легко вимірюються експериментально.

Далі слід йонізувати простір між пластинами якимось йонізатором, наприклад, Х-променями, провести такий самий експеримент і знову за тією ж формулою обчислити заряд q'. Зауважимо, що і в першому і в другому випадках заряд слід усереднювати за великою кількістю крапель. Тепер можна переконатися, що зміна заряду краплі Δq становить ціле число зарядів $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, тобто

$$\Delta q = \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}\right) n = en,$$

де n – ціле число.

(7) **На основі означення напруженості електричного поля та закону Кулона установимо вираз для напруженості поля точкового заряду.**

Нехай поле створене точковим зарядом q. Якщо в це поле внести пробний заряд q_0, то на нього з боку поля діятиме сила $\vec{F} = q_0 \vec{E}$. Але ця сила – це сила кулонівської взаємодії між зарядами q та q_0, тому згідно з законом Кулона підставимо за $\vec{F}$ вираз цього закону

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^3} \vec{r}.$$

Отже,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r_0}$$

або

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r},$$

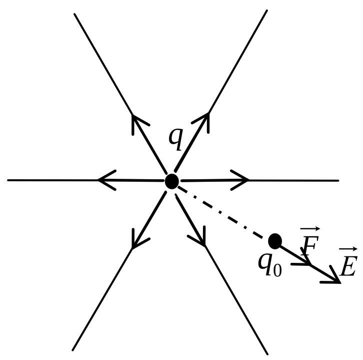
а величина напруженості

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

(8) **Установимо картину силових ліній поля точкового заряду.**

Нехай цей заряд позитивний. Розмістимо будь - де пробний заряд q_0 (мал. 5). Напруженість поля в цій точці

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0},$$



Мал. 5

де $\vec{F}$ – сила, яка діє з боку поля заряду q на заряд q_0. Але $\vec{F}$ – це сила взаємодії між цими зарядами, і за законом Кулона вона спрямована вздовж прямої, що проходить через ці два заряди. А оскільки вектор $\vec{E}$ отриманий діленням вектора $\vec{F}$ на додатній скаляр, то він направлений туди ж, куди і вектор $\vec{F}$. Такий самий результат буде в будь-якій іншій точці простору. Отже, поле точкового заряду радіальне.

(9) **Покажемо, що густота ліній напруженості електричного поля точкового заряду в певній області простору вказує на величину напруженості електричного поля в цій області.**

З виразу для напруженості поля точкового заряду випливає, що вона залежить лише від відстані від заряду, тобто є всюди однакова на сфері радіусом r. Представимо цей вираз так:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0 S},$$

де S – площа сфери радіусом r.

Густота силових ліній – це кількість силових ліній на одиницю площі поверхні, нормальної до цих силових ліній

$$n = \frac{N}{S_\perp} = \frac{N}{S \cdot cos\,\alpha}.$$

Підставивши S з цього виразу в останній вираз для E, дістанемо

$$E = \frac{q \cdot cos\,\alpha}{\varepsilon_0 \cdot N} n,$$

звідки бачимо, що величина напруженості пропорційна до густоти силових ліній n, тобто, там де більша густота силових ліній, там і більша напруженість поля.

Зауважимо, що для випадку поля точкового заряду цей висновок не має значної цінності, бо з аналітичного виразу і так видно, що ближче до заряду, то сильніше поле. Проте в тих випадках, де немає аналітичного виразу для величини вектора $\vec{E}$, цей метод дає можливість на основі графічної картини силових ліній порівняти напруженість поля в різних областях цього поля.

Тема 4. Принцип суперпозиції електричних полів

Постулати

➢ **Принцип суперпозиції електричних полів:** система точкових зарядів створює у кожній точці простору поле, напруженість якого дорівнює сумі напруженостей, створених кожним із цих зарядів

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i .$$

Задачі

(10) **Вкажемо на метод знаходження напруженості електричного поля зарядженого тіла, яке не можна вважати точковим зарядом.**

Будь-яке заряджене тіло представимо як систему нескінченної кількості нескінченно близьких один до одного, нескінченно малих точкових зарядів величиною dq. Очевидно, що кожен з цих зарядів буде створювати в певній точці простору нескінченно мале електричне поле напруженістю:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^3}\vec{r}.$$

Згідно з принципом суперпозиції, напруженість електричного поля у цій точці буде дорівнювати сумі згаданих напруженостей. Очевидно, що ми маємо справу з сумою нескінченної кількості нескінченно малих величин. А це є не що інше, як інтеграл. Отже,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^2}, \quad \vec{E} = k\int \frac{dq}{r^3}\vec{r}.$$

З цієї формули бачимо, що інтегрування слід провести по всьому заряду тіла, що важко зробити практично. Тому від інтегрування за зарядом перейдемо до інтегрування за об'ємом. Для цього застосуємо поняття об'ємної густини заряду $\rho \equiv \dfrac{dq}{dV}$. Дістанемо

$$\vec{E} = k\int \frac{\rho dV}{r^3}\vec{r},$$

тобто, принципово ми можемо обчислити напруженість поля, створену будь яким зарядженим тілом.

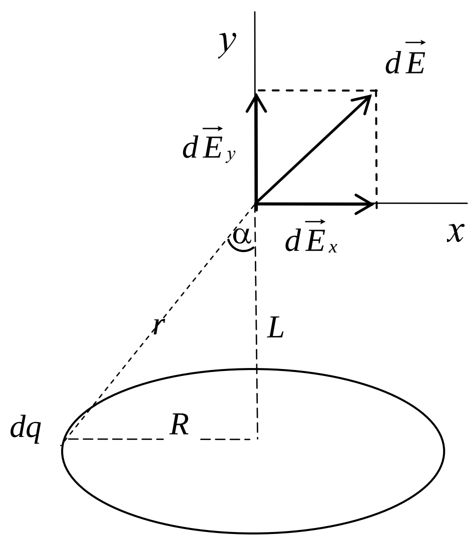
(11) **Установимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженого кільця радіусом R і лінійною густиною заряду λ на осі кільця на відстані L від його центру.**

Згідно з принципом суперпозиції $\vec{E} = \int d\vec{E}$. Розкладемо вектор $\overrightarrow{dE}$ на дві складові (мал. 6):

$$\overrightarrow{dE} = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j}.$$

Тоді:

$$\vec{E} = \vec{i}\int dE_x + \vec{j}\int dE_y.$$



Мал. 6

З малюнка бачимо, що для кожного вектора $d\overrightarrow{E_x}$ знайдеться до нього протилежний і таким чином сума всіх x–ових складових вектора $d\vec{E}$ дорівнює нулеві, тобто

$$\int dE_x = 0.$$

Задача спростилася і

$$\vec{E} = \vec{j}\int dE_y.$$

Як видно з малюнка

$$dE_y = dE\,cos\,\alpha,$$

тому

$$\vec{E} = \vec{j}\int dE\,cos\,\alpha = \vec{j}\int k\frac{dq}{r^2}cos\,\alpha.$$

Враховуючи, що $dq = \lambda dl$, де dl – елемент довжини кільця, маємо

$$\vec{E} = \vec{j}\int_0^l k\frac{\lambda dl}{r^2}cos\,\alpha.$$

Отже, інтегрування буде йти по всій довжині кільця l (l у нас водночас змінна інтегрування і довжина кільця).

Щоб обчислити цей інтеграл, слід кожну величину у підінтегральному виразі подати через змінну інтегрування l або винести за знак інтеграла, якщо вона не залежить від l. Що і зробимо:

$$E = k\frac{\lambda}{r^2}cos\,\alpha\int_0^l dl = k\frac{\lambda}{r^2}l\,cos\,\alpha.$$

Представимо тепер всі ці величини через відомі

$$E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R^2+L^2}\cdot\frac{L\cdot 2\pi R}{\sqrt{R^2+L^2}}=\frac{\lambda LR}{2\varepsilon_0\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

І для вектора $\vec{E}$

$$\vec{E}=\frac{\lambda LR}{2\varepsilon_0\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{j}.$$

Остання рівність говорить про те, що шукана нами напруженість електричного поля – це вектор, спрямований вздовж осі *y,* величина якого

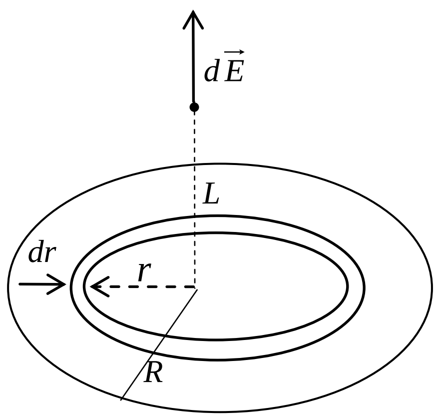
$$E=\frac{\lambda LR}{2\varepsilon_0\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

або оскільки кільце рівномірно заряджене, замінивши $\lambda=\frac{q}{l}=\frac{q}{2\pi R}$, отримаємо

$$E=\frac{qL}{2\varepsilon_0\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(12) **Знайдемо вираз для напруженості поля рівномірно зарядженого поверхневою густиною заряду σ диска радіусом R на осі диска на відстані L від його центра.**

Розділимо диск на нескінченну кількість кілець і скористаємося результатом попередньої задачі. Одне з таких кілець товщиною dr і радіусом r показано на мал. 7.



Мал. 7

Оскільки його товщина нескінченно мала, то на ньому розміщений нескінченно малий заряд dq. Тому напруженість поля, яку воно створює в точці на осі кільця, згідно з результатом попередньої задачі, є

$$E = \frac{Ldq}{2\varepsilon_0 \left(r^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Зверніть увагу, що замість сталого радіуса кільця R підставлено радіус r будь-якого кільця (R тепер у нас є радіусом диска).

Виразимо dq через поверхневу густину заряду. Дістанемо

$$dE = \frac{L\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

де dS – площа виділеного нескінченно малого кільця. Очевидно, що $dS = 2\pi r dr$, тому маємо

$$dE = \frac{L\sigma r dr}{2\varepsilon_0 \left(r^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Інтегруємо

$$E = \int_0^K \frac{L\sigma r dr}{2\varepsilon_0 \left(r^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{L\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^K \frac{d\left(r^2 + L^2\right)}{2\left(r^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{L\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \Bigg|_0^R = \frac{L\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right).$$

Остаточно,

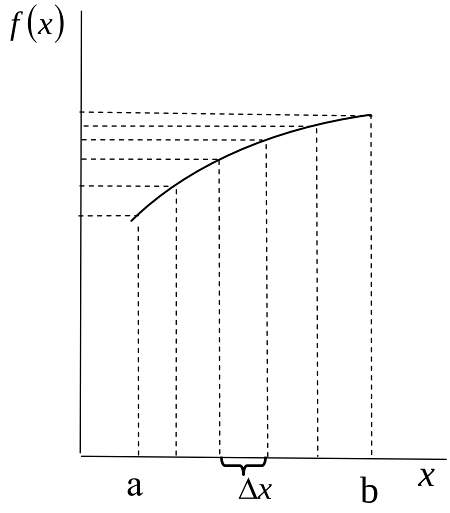
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}}\right).$$

(13) **Знайдемо середнє значення напруженості електричного поля точкового заряду в межах майданчика у вигляді диска, якщо заряд є на осі цього диска.**

Математичний відступ: середнє значення функції.

Нам слід обчислити середнє значення функції на проміжку [a, b]. Очевидно, що наближено це можна зробити, розділивши цей проміжок на n проміжків шириною Δx (мал. 8). Тоді

$$\overline{f} \approx \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}.$$



Мал. 8

або представивши $n = \frac{|a-b|}{\Delta x}$,

$$\overline{f} \approx \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{|a-b|}\Delta x = \frac{1}{|a - b|}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

При $n \to \infty$ (при цьому $\Delta x \to 0$) сума переходить в інтеграл і дістаємо точну формулу

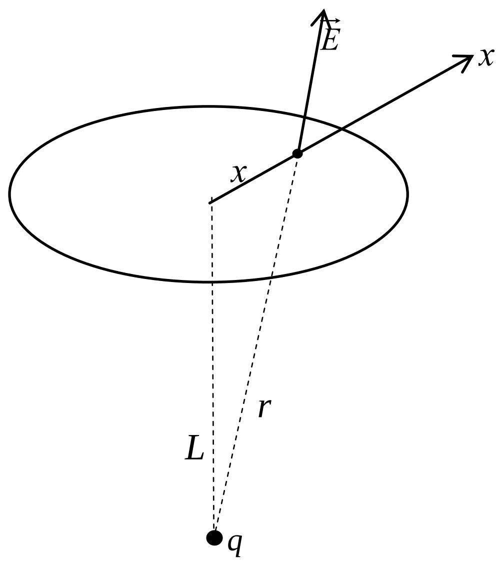
$$\overline{f} = \frac{1}{|a-b|}\int_a^b f(x)dx.$$

Повернемося до нашої задачі (мал. 9). З міркувань симетрії можемо зробити висновок, що середнє значення напруженості поля вздовж будь-якого радіуса диска однакове і тому дорівнює середньому значенню на всьому диску. Отже, нам досить обчислити середнє значення вздовж будь-якого радіуса

$$\overline{E} = \frac{1}{R}\int_0^R E dx = \frac{1}{R}\int_0^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^R \frac{dx}{r^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^R \frac{dx}{x^2 + L^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 RL^2}\int_0^R \frac{dx}{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 RL} arctg \left.\frac{x}{L}\right|_0^R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 RL} arctg \frac{R}{L}.$$



Мал. 9.

Остаточно,

$$\overline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 RL} arctg \frac{R}{L}.$$

Тема 5. Диполь

Фізичні поняття

• **Плече диполя –** вектор, проведений від негативного заряду диполя до позитивного (позначення $\vec{l}$).

• **Жорсткий диполь –** диполь, плече якого залишається сталим.

• **Точковий диполь –** диполь, плече якого значно менше за відстань від диполя до точки спостереження.

Фізичні величини

• **Дипольний момент –** це добуток одного із зарядів диполя на його плече (позначення $\vec{p}$)

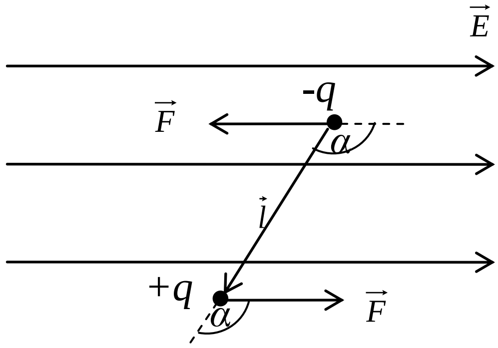
$$\vec{p} \equiv q\vec{l}.$$

Фізичні системи й прилади

• **Диполь –** це система двох однакових за величиною та протилежних за знаком точкових зарядів.

Задачі

(14) **Установимо, який стан займе вільний диполь, який потрапив в однорідне електричне поле.**



Мал. 10

Під вільним диполем очевидно розуміємо вільне тіло, тобто тіло, на яке не діють жодні сили.

На кожен із зарядів диполя діє сила величиною $F \equiv qE$. Напрями цих сил протилежні. Оскільки диполь жорсткий, то ці сили спричиняють виникнення моменту пари сил:

$$\overrightarrow{M} = \vec{F} \times \vec{l} = q\vec{E} \times \vec{l},$$

величина якого

$$M = qEl \sin\alpha = pE \sin\alpha,$$

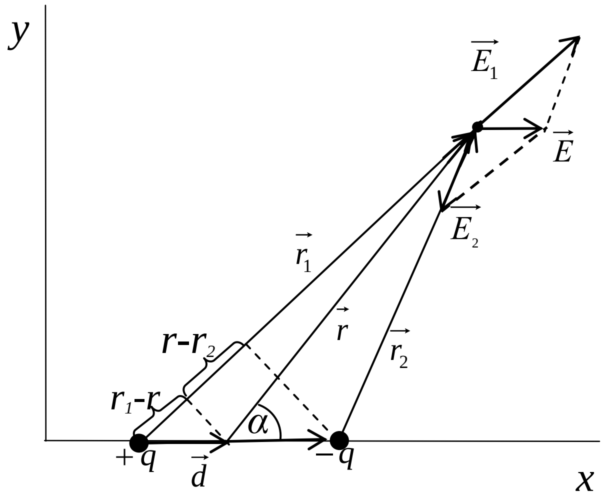
де α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{E}$. З мал. 10 бачимо, що диполь повертатиметься доти, доки кут α не дорівнюватиме нулеві, тобто диполь розташується так, що його дипольний момент буде паралельний до вектора $\vec{E}$. Після цього на заряд $+q$ буде діяти сила величиною qE в напрямку силових ліній, а на заряд $-q$ – така ж сила проти силових ліній, тобто поле буде намагатися розірвати диполь (тоді як рівнодійна сила на диполь загалом дорівнює нулеві, що означає, що диполь буде в стані спокою).

(15) **Установимо вираз для напруженості електричного поля точкового диполя з плечем $\vec{l}$ в точці на відстані r від середини плеча диполя, яку видно під кутом α до плеча диполя.**

Згідно з принципом суперпозиції електричних полів (мал. 11)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad (1)$$

де $\vec{E}_1$ – напруженість поля в певній точці, створена зарядом $+q$, $\vec{E}_2$ – напруженість поля в цій же точці створена зарядом $-q$.



Мал. 11

З мал. 11 бачимо, що згідно з формулою напруженості точкового заряду

$$\vec{E}_1 = k\frac{q}{r_1^3}\vec{r}_1, \ \vec{E}_2 = -k\frac{q}{r_2^3}\vec{r}_2, \qquad (2)$$

де знак «–» вказує на те, що відповідний заряд негативний і вектори $\vec{r}_2$ і $\vec{E}_2$ є протилежно напрямлені.

Виразимо вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ через $\vec{r}$ і $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{l}$.

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{d}, \ \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{d}, \qquad (3)$$

а також довжини векторів $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ через довжини векторів $\vec{r}$ і $\vec{d}$ (враховуючи, що $d << r$):

$$r - r_2 = d\cos\alpha, \ r_1 - r = d\cos\alpha,$$

звідки

$$r_2 = r - d\,cos\,\alpha,\; r_1 = r + d\,cos\,\alpha. \tag{4}$$

Повертаючись до рівності (1) і підставляючи в неї (2), (3) і (4), матимемо

$$\vec{E} = k\frac{q}{r_1^3}\vec{r_1} - k\frac{q}{r_2^3}\vec{r_2} = kq\left(\frac{\vec{r_1}}{r_1^3} - \frac{\vec{r_2}}{r_2^3}\right) =$$

$$= kq\left(\frac{\vec{r} - \vec{d}}{(r + d\,cos\,\alpha)^3} - \frac{\vec{r} + \vec{d}}{(r - d\,cos\,\alpha)^3}\right) =$$

$$= \frac{kq}{r^3}\left(\frac{\vec{r} - \vec{d}}{\left(1 + \frac{d}{r}cos\,\alpha\right)^3} - \frac{\vec{r} + \vec{d}}{\left(1 - \frac{d}{r}cos\,\alpha\right)^3}\right).$$

Піднявши вирази в знаменниках до кубу й знехтувавши доданками, які містять малі порівняно з одиницею величини $\left(\frac{d}{r}\right)^2$ та $\left(\frac{d}{r}\right)^3$, дістанемо:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3}\left(\frac{\vec{r} - \vec{d}}{1 + 3\frac{d}{r}cos\,\alpha} - \frac{\vec{r} + \vec{d}}{1 - 3\frac{d}{r}cos\,\alpha}\right).$$

Звівши до спільного знаменника, який буде $1 - \left(3\frac{d}{r}cos\,\alpha\right)^2 \approx 1$, дістанемо

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3}\left(\left(1 - 3\frac{d}{r}cos\,\alpha\right)\left(\vec{r} - \vec{d}\right) - \left(1 + 3\frac{d}{r}cos\,\alpha\right)\left(\vec{r} + \vec{d}\right)\right).$$

Після перетворень і врахувавши, що $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{l}$

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3}\left(\vec{l} - 3\frac{l}{r}\cos\alpha\,\vec{r}\right),$$

або, врахувавши, що $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\vec{l} - 3\frac{l}{r}\cos\alpha\,\vec{r}\right). \qquad (4)$$

Знайдемо ще вираз для модуля вектора $\vec{E}$.

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{kq}{r^3}\right)^2\left(l_x - 3\frac{l}{r}\cos\alpha r_x\right)^2 + \left(\frac{kq}{r^3}\right)^2\left(l_y - 3\frac{l}{r}\cos\alpha r_y\right)^2} =$$
$$= \frac{kq}{r^3}\sqrt{\left(l - 3l\cos^2\alpha\right)^2 + \left(3l\cos\alpha\sin\alpha\right)^2}.$$

Після перетворення дістанемо

$$E = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

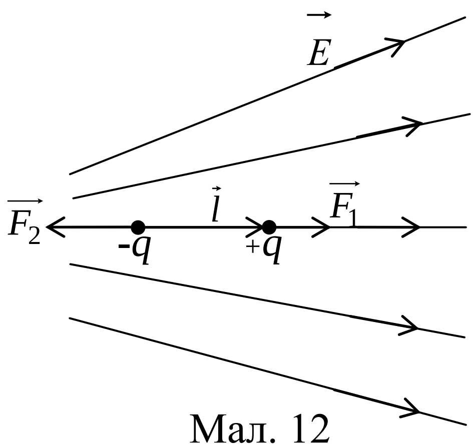
Формули (4) і (5) задають напрям і величину вектора $\vec{E}$ в будь-якій точці простору.

(16) **Покажемо, що в неоднорідному електричному полі вільний диполь не буде в стані спокою (на відміну від випадку однорідного поля, де диполь є в стані спокою), а рухатиметься в напрямі зростання поля.**

Очевидно, що як тільки диполь потрапить в електричне поле, він розташується вздовж однієї із його силових ліній так, що його дипольний момент буде паралельний до неї (мал. 12).

Біля заряду $-q$ напруженість електричного поля більша, ніж біля заряду $+q$, бо там більша густота силових ліній. Тому рівнодійна сила

$$F = F_1 - F_2 = qE - q(E - \Delta E) = q\Delta E,$$



Мал. 12

де ΔE – зміна напруженості поля на відстані l. Представимо цю зміну так: $\Delta E = NdE$, де dE – дуже мала зміна величини вектора $\vec{E}$, яка відбувається на малій відстані dx. Тоді взявши до уваги, що $N = l/dx$, маємо

$$F = q\frac{dE}{dx}l.$$

Отже, рівнодійна сила, яка діє на диполь, не дорівнює нулеві, і диполь буде рухатися у напрямку зростання поля.

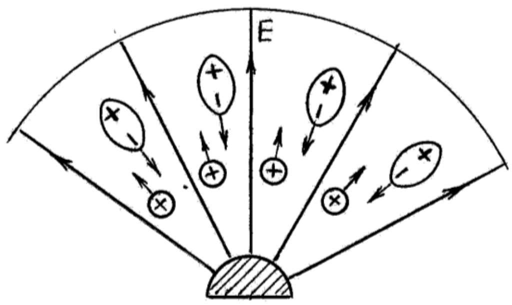
(17) **Пояснимо явище притягання дрібних частинок до наелектризованих тіл.**

Наприклад, це можуть бути шматочки паперу, які притягаються до наелектризованої пластмасової кулькової ручки або пил до екрана телевізора.

В електричному полі наелектризованого тіла маленькі частинки стають диполями (поляризуються), а оскільки це поле неоднорідне, то як ми вже з’ясували, то вони рухаються у бік його зростання, тобто до тіла.

(18) **Пояснимо принцип роботи йонного мікроскопа.**

У камері (мал. 13) створюють високий вакуум, а між зразком і стінкою камери прикладають високу напругу. Потім в камеру запускають атоми гелію чи неону. У сильному електричному полі атоми стають диполями і внаслідок неоднорідності цього поля рухаються в бік його зростання, тобто до зразка. Біля поверхні зразка поле стає настільки сильним, що воно йонізує атом, відірвавши від нього електрон. Позитивні йони гелію (чи неону) рухаються до екрана даючи на ньому зображення зразка.



Мал. 13

Тема 6. Потік електричної індукції. Теорема Остроградського –Гауса

Фізичні величини

• **Електрична індукція –** це вектор

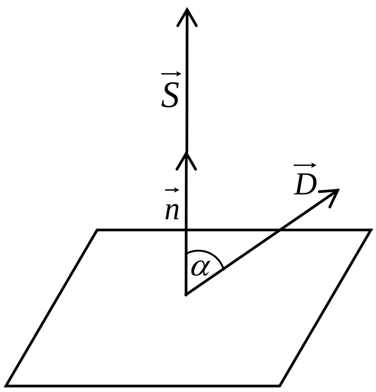
$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E}.$$

• **Потік електричної індукції однорідного електричного поля через плоску поверхню –** це скалярний добуток вектора електричної індукції на площу цієї поверхні (позначення Φ_D)

$$\Phi_D \equiv \vec{D}\vec{S} \equiv DS\cos\alpha = D_n S,$$

де $\vec{S} = S\vec{n}$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні (мал. 14).

Аналогічно означається потік напруженості електричного поля.

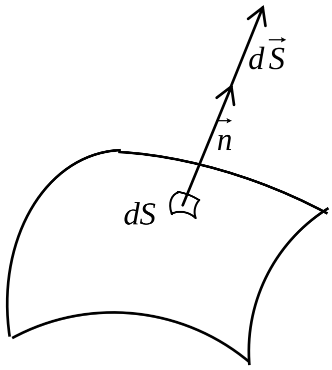


Мал. 14

Задачі

(19) **На основі означення потоку електричної індукції однорідного поля через плоску поверхню виведемо формулу для потоку електричної індукції будь-якого поля через будь яку поверхню.**

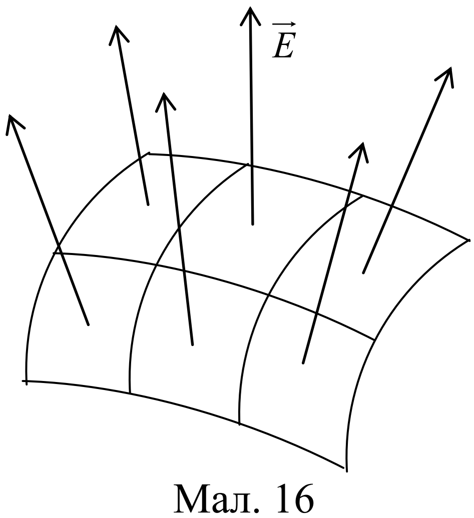
Розділимо цю поверхню на велику кількість нескінченно малих поверхонь площею dS, які, очевидно, можна вважати плоскими (мал. 15).



Мал. 15

Крім того, в межах цієї поверхні поле можна вважати однорідним. Таким чином до цієї нескінченно малої поверхні можна застосувати означення потоку однорідного поля через плоску поверхню

$$d\Phi_D \equiv \overrightarrow{D}\overrightarrow{dS}.$$



Мал. 16

Очевидно, що потік через всю поверхню буде дорівнювати сумі потоків через всі поверхні площею dS. Тому

$$\Phi_D = \int_S \overrightarrow{D}\overrightarrow{dS}.$$

З цього виведення випливає також висновок про те, що потоки можна додавати, тобто оскільки площа поверхні S дорівнює сумі площ складових поверхонь, то потік через цю поверхню дорівнює сумі потоків через ці складові поверхні: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + ... + \Phi_n$ (мал. 16).

(20) **Доведемо, що потік індукції електричного поля через певну поверхню пропорційний до кількості силових ліній, які її пронизують.**

Для доведення скористаємось тим фактом, що величина вектора електричної індукції пропорційна до густоти силових ліній (задача 8), тобто $D \sim n$.

Згідно з означенням потоку, пропорційністю між D і n та означенням густоти силових ліній, маємо:

$$\Phi_D = \int_S D\cos\alpha dS \sim \int_S n\cos\alpha dS = \int_S \frac{dN}{dS\cos\alpha}\cos\alpha dS = \int dN = N.$$

Отже,

$$\Phi_D \sim N,$$

що означає, що кількість силових ліній, які пронизують цю поверхню, вказує на величину потоку електричної індукції через неї. Згадаймо, що в гідроаеродинаміці є подібна ситуація: густота ліній потоку вказує на швидкість потоку, а кількість ліній потоку – на величину потоку, яка дорівнює об'єму рідини чи газу, що перетинає певний переріз за одиницю часу.

(21) **Доведемо теорему Остроградського–Гауса: потік електричної індукції через будь-яку замкнену поверхню дорівнює заряду, який є в об'ємі, обмеженому цією поверхнею, тобто**

$$\Phi_D = q, \tag{1}$$

або, застосувавши означення потоку та об'ємної густини заряду,

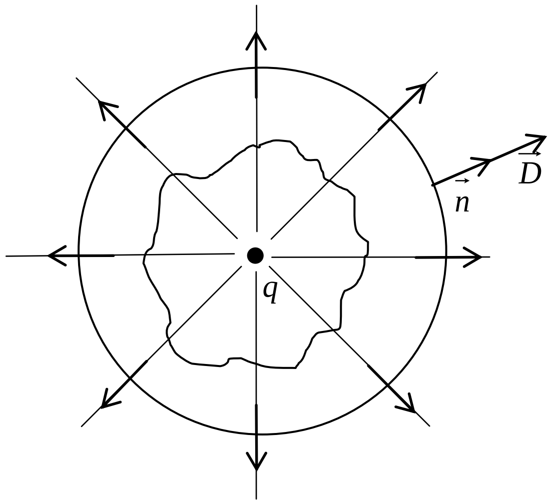
$$\int_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV. \tag{2}$$

Спочатку доведемо це для точкового заряду. Охопимо його сферичною поверхнею з центром в місці знаходження заряду (мал. 17) і обчислимо потік електричної індукції через цю сферу.

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S DdS \cos\alpha = D\int_S dS = DS =$$

$$= \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = q.$$

Ми винесли D за знак інтеграла завдяки тому, що модуль вектора $\vec{D}$ є однаковий в усіх точках сферичної поверхні.



Мал. 17

З мал. 17 бачимо, що через будь-яку поверхню (не обов’язково сферичну), яка охоплює заряд проходить така ж сама кількість силових ліній, тому і потік через цю поверхню буде такий самий (задача 20), тобто дорівнюватиме заряду q. Крім того, з цих міркувань випливає, що потік через будь-яку замкнену поверхню не залежить від розміщення заряду в об’ємі, обмеженому цією поверхнею. Це означає, що якщо є не один точковий заряд, то потік буде дорівнювати їхній сумі (інтегралу, якщо їх нескінченно багато), тобто

$$\Phi_D = \int_V \rho dV.$$

(22) **Переведемо теорему Остроградського–Гауса з інтегральної в диференціальну форму, тобто в таку форму рівняння, у яку б входили диференціальні характеристики, що означає: характеристики певної точки поля.**

Охопимо заряд dq, об'ємна густина якого ρ кубом з ребрами dx, dy, dz, і знайдемо потік електричної індукції через цей куб (мал. 18).

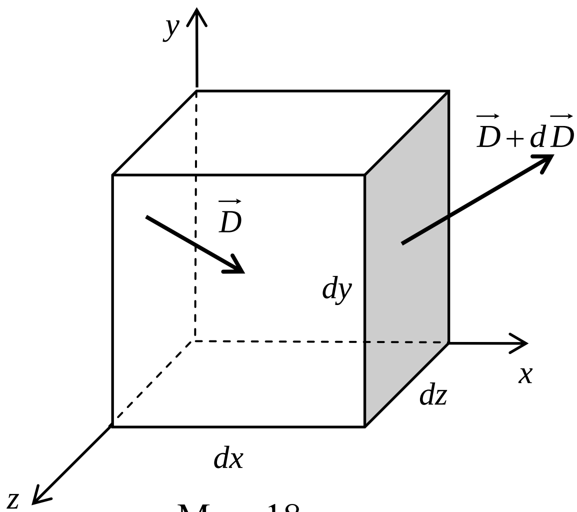
Потік через ліву грань буде рівний $-D_x dydz$ (мінус тому, що проекція вектора D на зовнішню нормаль від'ємна). Потік через праву грань: $(D_x + dD_x)dydz$. Потік через ці дві грані

$$\Phi_{D_x} = -D_x dydz + (D_x + dD_x)dydz = dD_x dydz.$$

Аналогічно для потоків через нижню – верхню грані та передню – задню

$$\Phi_{D_y} = dD_y dxdz.$$

$$\Phi_{D_z} = dD_z dxdy.$$



Мал. 18

Повний потік через поверхню куба

$$\Phi_D = \Phi_{D_x} + \Phi_{D_y} + \Phi_{D_z} =$$
$$= dD_x dydz + dD_y dxdz + dD_z dxdy.$$

За теоремою Остроградського–Гауса

$$\Phi_D = dq \equiv \rho dV = \rho dxdydz.$$

Підставивши сюди знайдений вираз для потоку, і поділивши ліву й праву частини на $dxdydz$, дістанемо

$$\frac{dD_x}{dx} + \frac{dD_y}{dy} + \frac{dD_z}{dz} = \rho.$$

Очевидно, що це частинні похідні, тому

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho,$$

або взявши до уваги, що така сума похідних від координат вектора – це дивергенція цього вектора, можемо написати

$$div\vec{D}=\rho.$$

Врахувавши, що

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$$

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

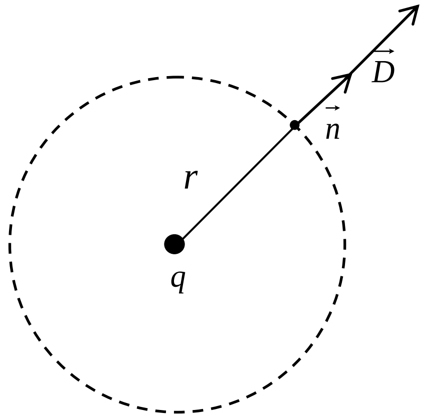
Тема 7. Обчислення напруженостей електричних полів на основі теореми Остроградського–Гауса

Задачі

(23) **На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля точкового заряду.**

Охопимо заряд уявною сферичною поверхнею, яка проходить через точку, в якій ми шукаємо напруженість поля. Знайдемо потік електричної індукції через цю поверхню.

$$\Phi_D=\int_S\vec{D}d\vec{S}=\int_S DdS\cos\alpha=$$



Мал. 19

$$= \int_S DdS = D\int dS = 4\pi r^2 D.$$

Згідно з теоремою Остроградського–Гауса, прирівняємо отриманий результат до величини заряду q

$$4\pi r^2 D = q,$$

звідки

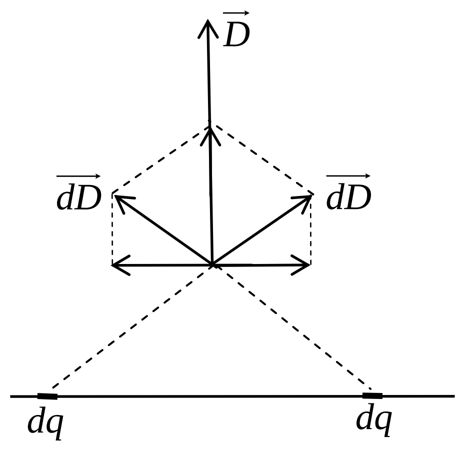
$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

А для вектора $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

(24) **На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною заряду σ.**

Спочатку встановимо напрям вектора $\vec{D}$ в довільній заданій точці простору, тобто з'ясуємо картину силових ліній поля. Згідно з принципом суперпозиції електричних полів, вектор $\vec{D}$ буде результатом додавання усіх векторів $d\vec{D}$, створених нескінченно малими ділянками площини. Оскільки площина нескінченна, то для будь-якого електричного заряду dq знайдеться симетричний, який дає протилежну проекцію на горизонтальну вісь (мал. 20). Отже, всі горизонтальні проекції будуть



Мал. 20

скомпенсовані, залишаться тільки вертикальні, що означає, що лінії індукції електричного поля це прямі паралельні до площини.

Охопимо частину площини паралелепіпедом, поверхня якого проходить через задану точку (мал. 21) і знайдемо потік через його поверхню. Очевидно, що потоки через грані, нормальні до площини, дорівнюють нулеві, бо кут α між вектором $\vec{D}$ і нормаллю до поверхні паралелепіпеда дорівнює 90^0. Залишаються потоки через грані, паралельні до площини. Згідно з теоремою Остроградського–Гауса, враховуючи, що поле однорідне всюди на грані, маємо:

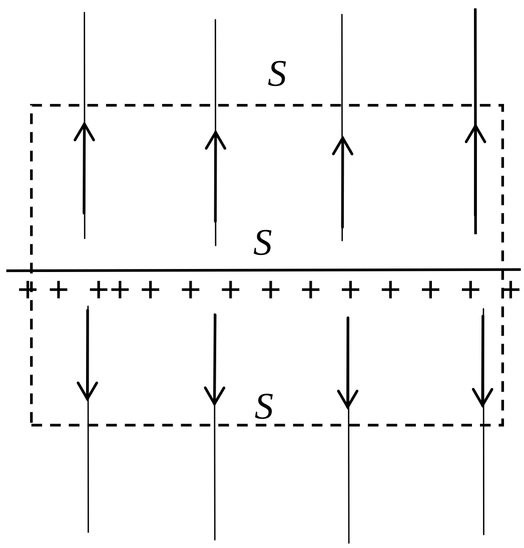
$$2DS = q \equiv \sigma S,$$

звідки:

$$D = \frac{\sigma}{2},$$

і

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$



Мал. 21

Зауважте, що напруженість поля нескінченної площини – це стала величина, яка не залежить від відстані від площини. Якщо площина обмежена, то очевидно ця формула правильна тільки для точок розміщених дуже близько до неї.

(25) **На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напружености електричного поля на поверхні зарядженого провідника.**

Для розв’язання цієї задачі скористаємося тим фактом, що електричне поле всередині провідника відсутнє (надалі ми поставимо перед собою задачу довести це).

Очевидно, що для всіх точок, які лежать дуже близько до поверхні провідника, провідник можна вважати нескінченною площиною, якої б форми він не був. Отже, задача зводиться до попередньої з тією різницею, що поле існує лише поза провідником (мал. 21).

За теоремою Остроградського–Гауса

$$DS = \sigma S,$$

звідки

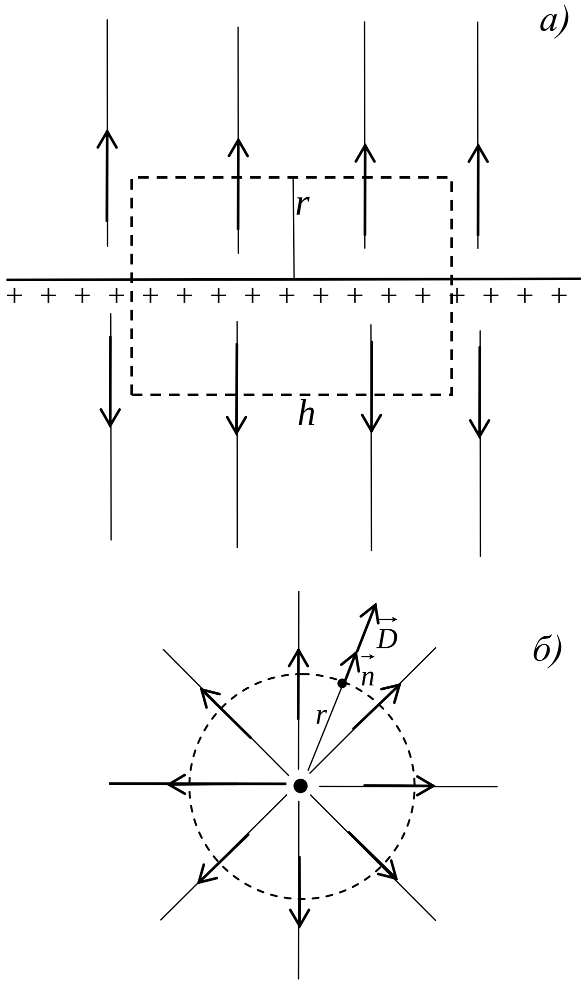
$$D = \sigma, \ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

(26) **На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої нескінченно довгої прямої нитки з лінійною густиною заряду λ.**

З міркувань симетрії, подібних до міркувань щодо поля не скінченної площини, знаходимо, що вектор електричної індукції у будь-якій точці є нормальним до нитки (мал. 22, а, б). Охопимо частину нитки уявним циліндром поверхня якого проходить через точку в якій ми шукаємо напруженість поля.

Знайдемо потік електричної індукції через цей циліндр. З малюнка видно, що потік через основи циліндра дорівнює нулеві, бо кут між векторами $\vec{D}$ і $\vec{n}$ прямий.

Потік через бічну поверхню



Мал. 22

$$\Phi_D = DS = 2\pi rhD.$$

Всередині циліндра знаходиться заряд

$$q = \lambda h,$$

тому за теоремою Остроградського–Гауса

$$2\pi rhD = \lambda h,$$

звідки

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r},$$

і

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

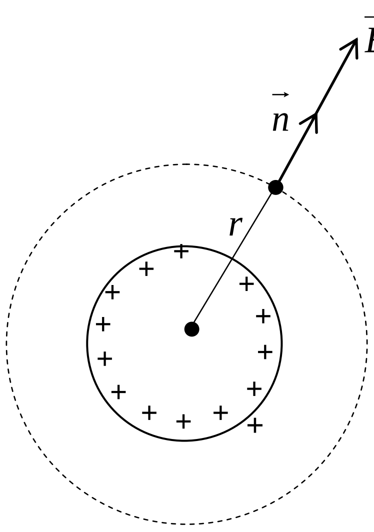
(27) **На основі теореми Остроградського-Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої сфери.**

З міркувань симетрії робимо висновок, що вектор $\vec{D}$ в кожній точці простору за сферою спрямований радіально.

Нехай на сфері є сумарний заряд q. Охопимо заряджену сферу ще однією сферою, яка проходить через задану точку (мал. 23). Згідно з теоремою Остроградського–Гауса:

$$DS = q,$$

$$4\pi r^2 D = q,$$



Мал. 23

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Бачимо, що напруженість поля сфери з зарядом q така ж, як і напруженість поля точкового заряду q поміщеного в центрі цієї сфери.

(28) **На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженого не скінчено довгого циліндра.**

Охопимо заряджений циліндр ще одним уявним циліндром, проте таким, який проходить через точку, в якій ми шукаємо напруженість поля. З тих же міркувань, що і для поля нитки, робимо висновок, що лінії напруженості є прямі нормальні до бічної поверхні циліндра (мал. 24, а, б).

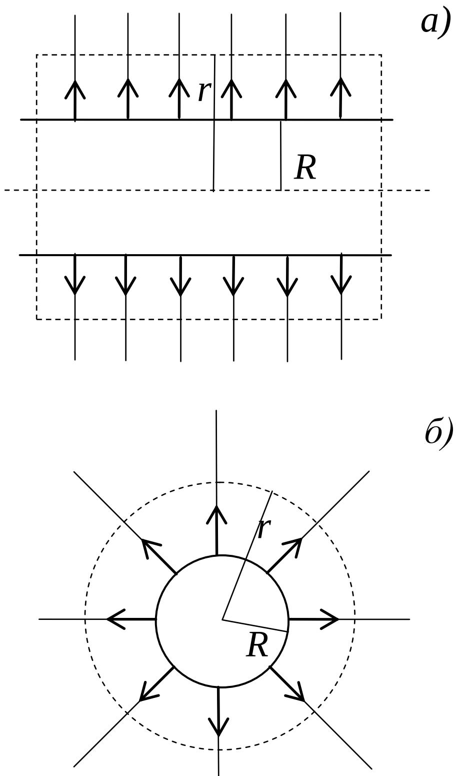
Оскільки всюди на поверхні уявного циліндра поле однакове за величиною і спрямоване вздовж нормалі до циліндра, то потік матиме найпростіший вигляд $\Phi_D = DS$ і згідно з теоремою Остроградського–Гауса

$$DS = q,$$

або

$$DS = \sigma S',$$

де q – заряд, який є всередині уявного циліндра, σ – поверхнева густина заряду на циліндрі, S' – площа бічної поверхні реального циліндра.



Мал.24

З малюнка бачимо, що потік через основи циліндра дорівнює нулеві, тому остання формула набуває вигляду:

$$D2\pi rh = \sigma 2\pi Rh,$$

звідки

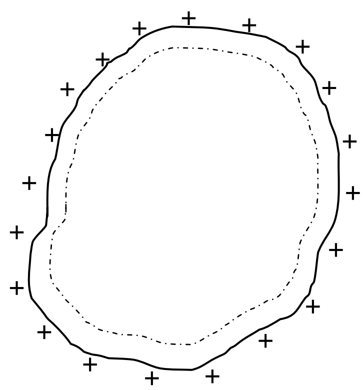
$$D = \sigma \frac{R}{r},$$

$$E = \sigma \frac{R}{\varepsilon_0 r}.$$

(29) **Доведемо, що в об'ємі, обмеженому зарядженою поверхнею, напруженість електричного поля дорівнює нулеві.**

Проведемо всередині поверхні уявну поверхню нескінченно близько до зарядженої поверхні (мал. 25). У цьому об'ємі немає зарядів, тому згідно з теоремою Остроградського–Гауса

$$div\vec{D} = 0,$$



Мал. 25

звідки:

$$\vec{D} = 0$$

і

$$\vec{E} = 0.$$

(30) **З'ясуємо, для розрахунку яких електричних полів можна ефективно застосовувати теорему Остроградського–Гауса.**

По-перше, очевидним є те, що нам має бути відома графічна картина силових ліній цього поля.

По-друге, оскільки індукція (чи напруженість) електричного поля входить у вираз для потоку, то в загальному випадку вона є під знаком визначеного інтеграла в підінтегральному виразі. Для того, щоб проінтегрувати, слід встановити залежності всіх величин (букв) підінтегрального виразу від змінної інтегрування і винести за знак інтеграла ті величини, які від неї не залежать. Стосовно вектора електричної індукції, це означає, що якщо він залежить від змінної інтегрування S, то, встановивши цю залежність, ми втратимо цю величину (букву D), а щоб вона збереглася у виразі потоку, то має бути незалежною від змінної інтегрування S. Таким чином, робимо висновок, що теорему Остроградського–Гауса варто застосовувати до тих полів, для яких ми можемо віднайти таку уявну замкнену поверхню, на якій величина $D_n = D cos\alpha$ є всюди однакова.

Тема 8. Потенціял електростатичного поля

Фізичні величини

• **Потенціял електростатичного поля в певній точці простору –** це відношення роботи, яку слід виконати при переміщенні точкового заряду з цієї точки у нескінченність до величини цього заряду (позначення φ):

$$\varphi = \frac{A}{q_0}.$$

Але згадана робота є потенціяльною енергією цієї точки поля W, тому потенціял можна записати і так:

$$\varphi = \frac{W}{q_0}.$$

•**Різниця потенціялів –** різниця між потенціялами двох точок поля (позначення $\Delta\varphi$):

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Задачі

(31) **Покажемо, що якщо в заданій точці простору є не одне, а багато полів, то потенціял в цій точці дорівнюватиме сумі потенціялів, створених кожним із полів.**

Згідно з принципом суперпозиції полів, можемо вважати, що в цій точці простору присутнє лише одне поле, яке має відповідні характеристики – напруженість та потенціял. Цей потенціял згідно з означенням

$$\varphi = \frac{A}{q_0}.$$

Але роботу A результативного поля можна представити як суму робіт, виконаних окремими полями, тому

$$\varphi = \frac{A}{q_0} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{q_0} = \frac{A_1}{q_0} + \frac{A_2}{q_0} + \ldots + \frac{A_n}{q_0}.$$

Кожен з доданків в останній формулі – це потенціял відповідного поля, тобто

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i.$$

Отже, потенціял в певній точці дорівнює сумі потенціялів, створених кожним із полів:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i.$$

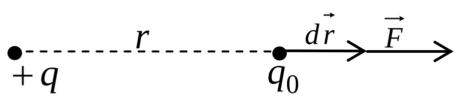
(32) **На основі означення потенціялу встановимо вираз для потенціялу поля точкового заряду q в точці, яка є на відстані r від цього заряду.**

Спочатку обчислимо роботу, яку виконує сила поля (чи зовнішня сила проти поля) при переміщенні пробного заряду q_0 з заданої точки в нескінченність. Оскільки сила зменшується під час переміщення (бо це сила кулонівської взаємодії між зарядами q та q_0), то застосуємо формулу роботи змінної сили:

$$A = \int_r^\infty \vec{F} d\vec{r} = \int_r^\infty F dr \cos\alpha = \int_r^\infty F dr = \int_r^\infty \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr =$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_r^\infty = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

де $\cos\alpha = 1$, бо α це кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$ (мал. 26).



Мал. 26

Згідно з означенням потенціялу

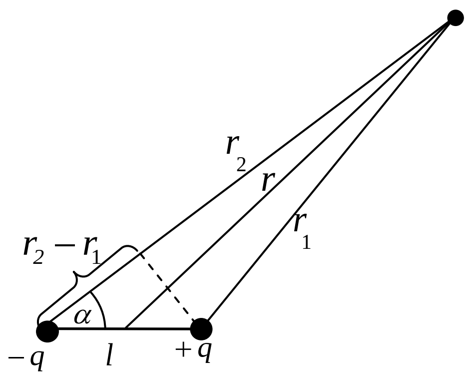
$$\varphi = \frac{A}{q_0} = \frac{1}{q_0} \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

(33) **На основі принципу додавання потенціялів та виразу для потенціялу поля точкового заряду встановимо вираз для потенціялу поля точкового диполя.**

Потенціяли поля зарядів $+q$ та $-q$ відповідно є:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1},$$

та



Мал. 27

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2},$$

де r_1 і r_2 – відстані від відповідних зарядів до заданої точки. Тому потенціял поля диполя:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

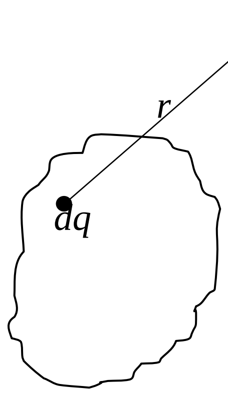
Для точкового диполя потенціял можна виразити через кут α та відстань r від заданої точки до диполя. З мал. 27 видно, що $r_2 - r_1 \approx l\cos\alpha$, $r_1 r_2 \approx r^2$, тому вираз для потенціялу поля точкового диполя буде мати вигляд:

$$\varphi = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha.$$

(34) **Знайдемо метод обчислення потенціялу, створеного будь-яким неточковим зарядженим тілом.**

Розділимо заряджене тіло на нескінченну кількість нескінченно малих частин і будемо вважати їх точковими зарядами dq. Тоді потенціял в певній точці на відстані r від заряду dq, створений цим точковим зарядом, буде (мал. 28)

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$



Мал. 28

Для того, щоб обчислити потенціял, створений усім тілом, слід, опираючись на принцип додавання потенціялів, додати всі потенціяли, створені окремими зарядами dq, що в цій ситуації означає: проінтегрувати по всьому тілу. Тому

$$\varphi = \int\limits_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Проте інтегрувати за зарядами важко, тому перейдемо до інтегрування за об'ємом, представивши dq як ρdV, де ρ – об'ємна густина заряду. Тоді

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_q \frac{\rho dV}{r}.$$

(35) **Знайдемо вираз для потенціялу поля, створеного рівномірно зарядженим диском у будь-якій точці на його осі.**

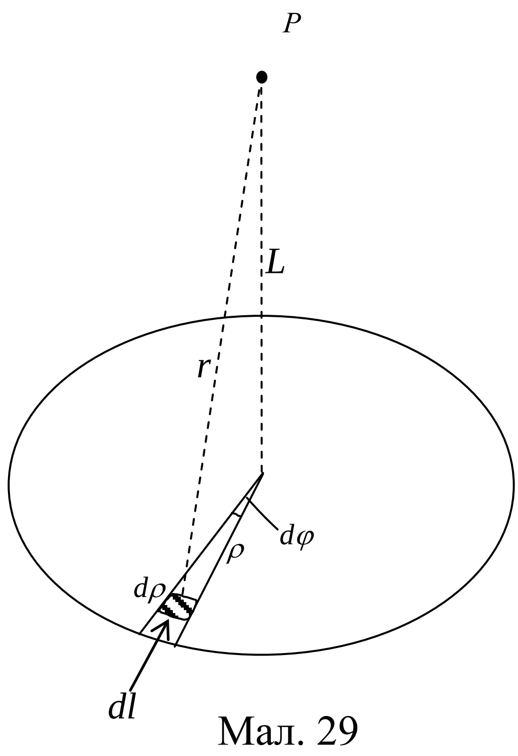
Розділимо диск на нескінченну кількість малих точкових зарядів dq. Тоді кожен з них в заданій точці P буде створювати поле з потенціялом

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Застосувавши принцип додавання потенціялів, та виразивши заряд через його поверхневу густину, потенціял, створений диском, представимо

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}.$$

Вибираємо довільний елемент площі dS, як показано на мал. 29. Тоді



Мал. 29

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{dl d\rho}{r}.$$

Відстань r від елементарної площі до заданої точки представимо через ρ і L як $\sqrt{\rho^2+L^2}$, а елемент довжини dl – через кут $d\varphi$ як $\rho d\varphi$. Маємо

$$\varphi=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2+L^2}}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\right)d\varphi=$$

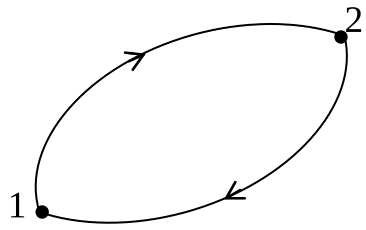
$$=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{d\left(\rho^2+L^2\right)}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\right)d\varphi=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+L^2}-L\right).$$

Тема 9. Потенціяльність електростатичного поля

Фізичні поняття

• **Потенціяльне поле –** це поле, робота сили якого на замкненій траєкторії дорівнює нулеві (мал. 30):

$$A_{12}+A_{21}=0, \qquad (1)$$



Мал. 30

де A_{12} – робота сили поля при переміщенні з точки 1 в точку 2, A_{21} – те саме з точки 2 в точку 1.

• **Циркуляція будь-якого вектора $\vec{a}$ вздовж замкненого контура L –** це інтеграл вздовж замкненого контура від скалярного добутку цього вектора на елемент довжини цього контура:

$$Ц\equiv\oint_L\vec{a}d\vec{l}.$$

• **Ротор будь-якого вектора $\vec{a}$ –** це вектор

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Задачі

(36) **На основі означення потенціялу доведемо, що електростатичне поле є потенціяльне.**

Нам слід довести, що в електростатичному полі виконується умова (1). Скористаємося означенням потенціялу. Дістанемо

$$A_{12} = q_0 \Delta\varphi = q_0(\varphi_2 - \varphi_1) = q_0\varphi_2 - q_0\varphi_1 =$$
$$= A_2 - A_1 = -(A_1 - A_2) = -A_{21}.$$

(37) **На основі означення роботи покажемо, що умовою потенціяльності електростатичного поля є рівність нулеві циркуляції вектора його напруженості вздовж будь-якого замкненого контура.**

За означенням роботи умова потенціяльності (1) матиме вигляд

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{l} + \int_2^1 \vec{F} d\vec{l} = 0,$$

або

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

Стосовно електростатичного поля, підставивши $F = q_0 E,$ умова (1) виглядатиме так:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \qquad (2)$$

Бачимо, що ліва частина рівності – не що інше як циркуляція вектора напруженості електростатичного поля. Тому умовою потенціяльності електростатичного поля є рівність нулеві циркуляції його напруженості вздовж будь-якого замкненого контура.

(38) **На основі теореми Стокса подамо умову потенціяльності електростатичного поля в диференціяльній формі.**

Зміст теореми Стокса: циркуляція будь-якого вектора (в тому числі і вектора напруженості електростатичного поля) вздовж замкненого контура дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню, обмежену цим контуром, тобто

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}d\vec{S}.$$

На основі цієї теореми умова потенціяльності (2) може бути написана так:

$$\int_S rot\vec{E}d\vec{S} = 0,$$

звідки, оскільки $S \neq 0$

$$rot\vec{E} = 0. \qquad (3)$$

Ми отримали ще один запис потенціяльності електростатичного поля, а саме диференціяльну її форму.

Тема 10. Зв'язок між напруженістю і потенціялом

Фізичні поняття

• **Градієнт даної скалярної величини** φ – це вектор, спрямований у бік найбільшого зростання цієї фізичної величини, модуль якого дорівнює відношенню зміни цієї фізичної величини до відстані в цьому напрямі найбільшого зростання, на якій відбулася ця зміна (позначення $grad\varphi$):

$$grad\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

• **Еквіпотенціяльна поверхня** – поверхня, у кожній точці якої потенціял однаковий.

Задачі

(39) **Установимо зв'язок між напруженістю електростатичного поля та його потенціялом.**

Згідно з означеннями потенціялу та роботи

$$\varphi = \frac{A}{q_0} = \frac{1}{q_0}\int dA = \frac{1}{q_0}\int \vec{F}d\vec{r} = \frac{1}{q_0}\int\left(-q_0\vec{E}\right)d\vec{r} =$$
$$= -\int\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right) = -\int E_x dx - \int E_y dy - \int E_z dz,$$

де знак «–», який з’явився при заміні $\vec{F}$ на $q_0\vec{E}$, вказує на те, що вектор $\vec{E}$ є протилежним до вектора зовнішньої сили $\vec{F}$ (бо пробний заряд q_0 позитивний).

Знайдемо частинну похідну від φ за x

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\int\frac{\partial E_x}{\partial x}dx - \int\frac{\partial E_y}{\partial x}dy - \int\frac{\partial E_z}{\partial x}dz.$$

Оскільки $\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$ та $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$, отримаємо що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x. \quad (1)$$

Аналогічно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y, \quad (2)$$

та

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_z. \quad (3)$$

Але вектор $\vec{E}$, як і будь-який інший, можна подати як лінійну комбінацію одиничних векторів

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}.$$

Взявши до уваги рівності (1), (2), (3), дістанемо

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \equiv -grad\varphi.$$

З цієї формули бачимо, що оскільки вектор $grad\varphi$ спрямований у бік найбільшого зростання потенціялу, то вектор $\vec{E}$ – у бік його найбільшого спадання.

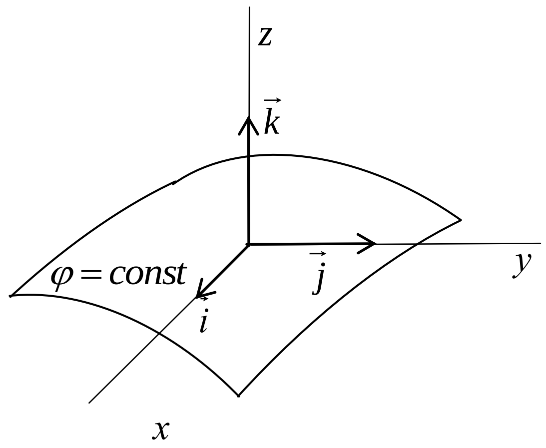
(40) **З формули зв'язку напруженості і потенціялу та теореми Остроградського–Гауса отримаємо рівняння Пуассона.**

Підставимо формулу зв'язку між напруженістю та потенціялом у формулу, яка виражає теорему Остроградського–Гауса в диферентціяльній формі $\left(div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$. Дістанемо

$$div(grad\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

або

$$div\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$



Мал. 31

Оскільки операція дивергенції полягає в тому, що слід взяти похідні за x, y і z від компонентів вектора і додати їх, то остання рівність набуває вигляду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

або скорочено

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

Останнє рівняння називають *рівняннями Пуассона*. За умови $\rho = 0$ це рівняння називають *рівнянням Лапласа:*

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

(41) **Доведемо, що вектор напруженості електростатичного поля завжди нормальний до еквіпотенціяльної поверхні.**

Виберемо систему координат так, щоб вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$ були дотичні до еквіпотенціяльної поверхні (мал. 31). Тоді в цій точці дотику

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

(Пам'ятаємо, що похідна в будь-якій точці – це кутовий коефіцієнт дотичної в цій точці, а оскільки цей кутовий коефіцієнт дорівнює нулеві, то і похідна дорівнює нулеві).

Тому, згідно з формулою зв'язку напруженості і потенціялу

$$\vec{E}=-\frac{d\varphi}{dz}\vec{k},$$

що означає, що $\vec{E} II \vec{k}$, тобто вектор $\vec{E}$ нормальний до цієї поверхні.

(42) **Доведемо теорему про середнє значення потенціялу: потенціял у будь-якій точці простору дорівнює середньому значенню потенціялу на будь-якій уявній сфері з центром в цій точці, яка не охоплює електричних зарядів.**

Напишемо формулу для середнього значення потенціялу на сфері

$$\overline{\varphi}=\frac{1}{S}\int_S \varphi dS$$

і знайдемо похідну від $\overline{\varphi}$ за радіусом сфери r

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dr}=\frac{1}{S}\int_S \frac{d\varphi}{dr}dS.$$

Згідно з формулою зв'язку між напруженістю і потенціялом $d\varphi/dr$, це проекція вектора напружености на радіус E_r, тому

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dr} = \frac{1}{S}\int_S E_r dS,$$

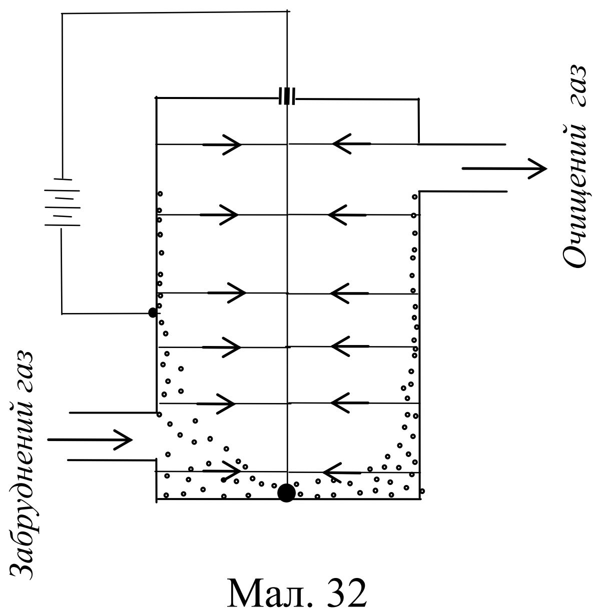
а за теоремою Остроградського–Гауса, оскільки в області обмеженій сферою електричні заряди відсутні, останній вираз дорівнює нулеві. Отже,

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dr} = 0,$$

що означає, що $\overline{\varphi}$ не залежить від радіуса сфери, тобто середнє значення потенціялу однакове на всіх сферах, в тому числі і на сфері нескінченно малого радіуса, яка збігається з заданою точкою.

(43) **Пояснимо метод електростатичного очищення газів.**

Для очищення газів беруть велику металеву бочку з провідником у її центрі, який ізольований від самої бочки (мал. 32).



Мал. 32

Цей провід перебуває під високою негативною напругою. Оскільки поблизу проводу висока напруженість поля (велика густота силових ліній), то повітря йонізується і потік електронів та йонів O_2^- електризує частинки домішок, які є в забрудненому газі, негативним зарядом.

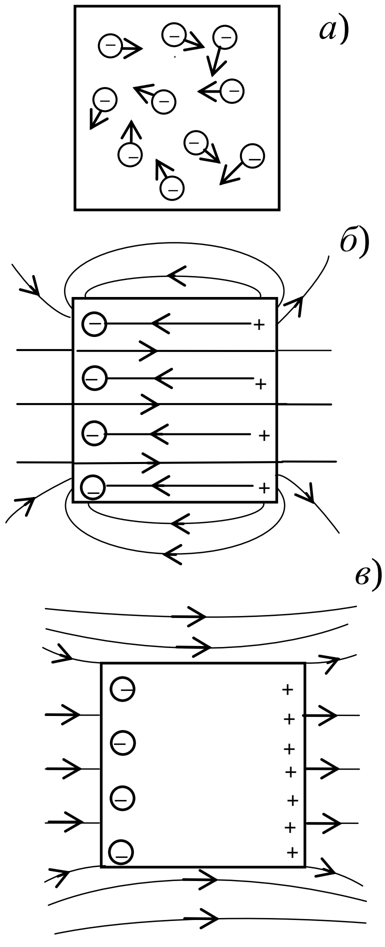
Ці негативно наелектризовані частинки починають рухатися проти поля і прилипають до стінок. Тоді їх струшують на дно бочки.

Тема 11. Провідник в електричному полі

Задачі

(44) **Покажемо, що в провіднику, поміщеному в електричне поле, воно дорівнюватиме нулеві, а за межами провідника – зміниться.**

Візьмемо конкретний провідник – метал. Відомо, що в ньому є вільні носії заряду – електрони (мал. 33, *а*), які рухаються хаотично. Як тільки ми включимо електростатичне поле, воно почне діяти на вільні електрони, і вони, маючи негативний заряд, почнуть рухатися проти силових ліній. У результаті їх нагромадження на одній з поверхонь, на протилежній поверхні (а точніше в усьому об'ємі) виникне нескомпенсований позитивний заряд, що стане причиною виникнення внутрішнього електричного поля, спрямованого протилежно до зовнішнього (мал. 33, *б*). Проте в міру нагромадження електронів на поверхні, внутрішнє поле буде зростати і все більше гальмувати інші електрони в їхньому русі проти зовнішнього поля. Коли внутрішнє поле зросте настільки, що воно зрівняється за величиною з зовнішнім, рух електронів припиниться. Оскільки напрями цих полів протилежні, то поле всередині провідника зникне (мал. 33, *в*). За межами провідника зліва і справа поле індукованих зарядів буде співнаправлене із зовнішнім полем, тому підсилить його. Проте зверху і знизу силові лінії здеформуються і густота їхня стане меншою, що означає, що там поле послаблюється.



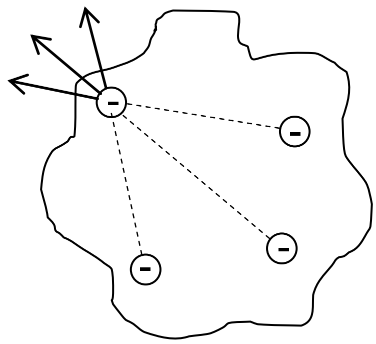
Мал. 33

Очевидно: якщо провідник порожнистий, то нічого від цього не зміниться, поле всередині такої провідної посудини відсутнє.

Це явище використовують для захисту електричних приладів від зовнішнього електричного поля. Для цього прилади поміщають у металеві корпуси.

(45) **Покажемо: якщо провіднику надати заряду, то він розміститься на його поверхні.**

Припустимо, що заряд розподілився в об'ємі провідника. Тоді на будь-який заряд з боку інших однойменних зарядів буде діяти сила, яка спрямована до поверхні. А оскільки він може вільно переміщуватися, то почне рухатися до поверхні (мал. 34). Те саме станеться і з іншими зарядами. В результаті всі заряди розмістяться на поверхні провідника.



Мал. 34

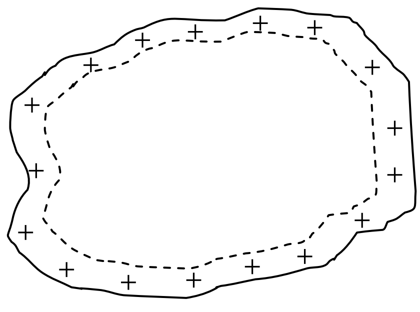
(46) **Покажемо, що як заряджений так і електронейтральний провідник є еквіпотенціяльним.**

Оскільки заряд розміщується на поверхні провідника, то поле всередині провідника відсутнє. Дійсно, виберемо замкнену поверхню всередині провідника (мал. 35). Так як в області, обмеженій цією поверхнею, немає зарядів, то згідно з теоремою Остроградського–Гауса

$$\int_S \vec{E}d\vec{S} = 0,$$

звідки, оскільки $S \neq 0$

$$\vec{E} = 0.$$



Мал. 35

З останньої рівності випливає, що

$$E_x = E_y = E_z = 0.$$

з формули зв'язку напруженості з потенціялом

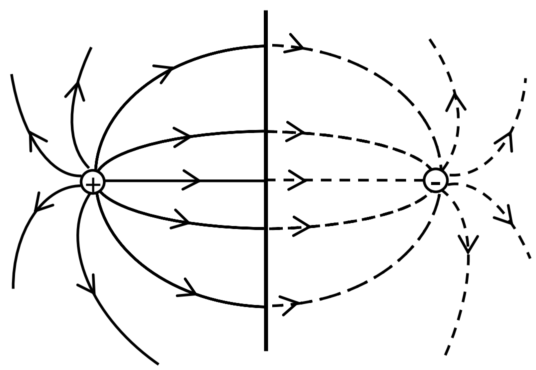
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

звідки робимо висновок, що φ не залежить від координат, тобто всюди всередині зарядженого (чи не зарядженого) провідника $\varphi = const$.

(47) **Доведемо, що електричне поле між точковим зарядом та нескінченною провідною площиною збігається з полем, створеним цим зарядом, та його дзеркальним зображенням у цій площині.**

Будемо доводити навпаки, що поле двох точкових різнойменних зарядів (поле диполя) можна замінити на поле одного заряду та провідної не зарядженої площини.

Проведемо одну з еквіпотенціяльних поверхонь, а саме ту, яка проходить через середину плеча диполя, яка як відомо, є площиною (мал. 36). Замінимо тепер цю еквіпотенціяльну площину на реальну провідну площину з потенціялом, що дорівнює потенціялу еквіпотенціяльної площини. Очевидно, що від цього нічого не зміниться, поле залишиться таким самим.



Мал. 36

Бачимо, що таким способом можна встановити картину силових ліній поля, створеного точковим зарядом та незарядженою провідною площиною. Цей спосіб має назву: метод дзеркальних зображень.

Тема 12. Діелектрик в електричному полі

Фізичні явища

• **Поляризація діелектрика –** явище виникнення сумарного ненульового дипольного моменту в кристалі діелектрика під впливом зовнішнього поля.

• **П'єзоелектричний ефект –** явище виникнення різниці потенціялів між поверхнями діелектрика після його деформації.

• **Електрострикція –** явище деформації діелектрика внаслідок прикладання до нього різниці потенціялів. Це явище є оберненим до п'єзоелектричного ефекту.

• **Електретний ефект –** явище незникнення поляризації діелектрика при виключенні електричного поля.

Фізичні поняття

• **Діелектрик –** це речовина, у якій відсутні вільні носії електричного заряду.

• **Полярний діелектрик –** це діелектрик, молекули якого мають дипольний момент (наприклад $H_2O,\ HCl,\ NH_3,\ CH_3Cl$**).**

• **Неполярний діелектрик –** це діелектрик, молекули якого не мають дипольного моменту (наприклад $H_2, N_2\ O_2,\ CCl$**).**

• **Сегнетоелектрик –** діелектрик, у якому є великі (порівняно з розмірами молекул) області (домени), у яких сумарний дипольний момент усіх молекул не дорівнює нулеві. Проте, оскільки, сумарні дипольні моменти окремих доменів спрямовані хаотично один відносно одного, то дипольний момент всього макрокристалу сегнетоелектрика дорівнює нулеві, як і в будь-якого іншого діелектрика. Прикладами сегнетоелектрика є сегнетова сіль, титанат барію.

Фізичні величини

• **Поляризованість окремої молекули –** це коефіцієнт пропорційності між її наведеним дипольним моментом $\overrightarrow{P_i}$ та індукцією електричного поля $\vec{D}$ всередині діелектрика, яке спричинилось до його виникнення (позначення β)

$$\vec{P_i} = \beta\vec{D}. \qquad (1)$$

З цієї формули отримаємо, що одиницею вимірювання β є м^3.

• **Поляризованість діелектрика –** це дипольний момент, який припадає на одиницю об'єму діелектрика (позначення $\vec{P}$)

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{P_i}}{V}. \qquad (2)$$

Цю величину ще називають *вектором поляризації*. Зауважимо, що поляризованість молекули – це скалярна величина, а поляризованість діелектрика – це вектор.

• **Відносна діелектрична сприйнятливість –** це добуток поляризованості молекули на їхню концентрацію, або іншими словами поляризованість усіх молекул в одиниці об'єму (позначення χ)

$$\chi = \beta n. \qquad (3)$$

З цієї формули випливає, що χ є безрозмірною величиною.

• **Відносна діелектрична проникність діелектрика –** це збільшена на одиницю відносна діелектрична сприйнятливість (позначення ε)

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

Задачі

(48) **Виразимо поляризованість поміщеного в електричне поле неполярного діелектрика через напруженість електричного поля всередині діелектрика.**

Оскільки в неполярному діелектрику дипольні моменти з'являються лише під дією електричного поля, то всі вони паралельні до поля і, відповідно, один до одного, тому

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = N\vec{P}_i, \tag{4}$$

де N – кількість молекул у діелектрику.

Згідно з означенням поляризованості (2), і останньою рівністю

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i}{V} = \frac{N\vec{P}_i}{V} = n\vec{P}_i,$$

де n – концентрація диполів (молекул).

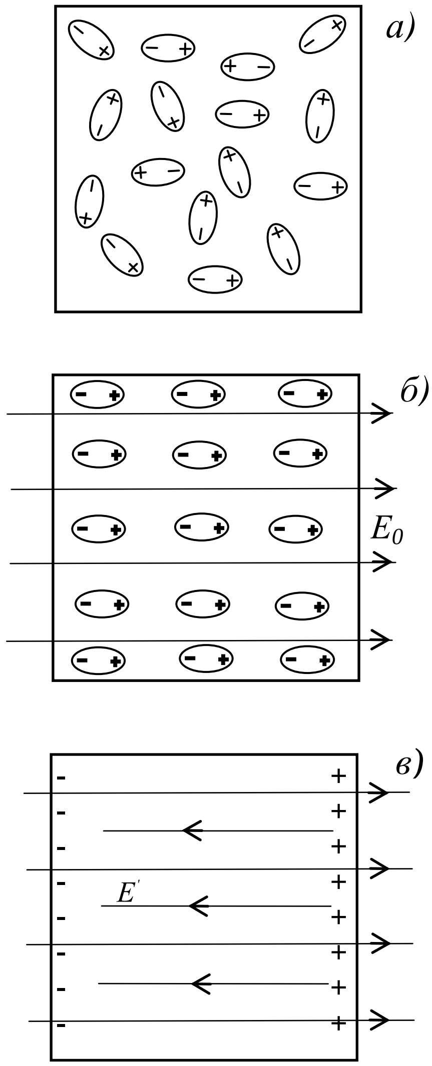
Поляризованість i-тої молекули представимо згідно з її означенням (1). Дістанемо

$$\vec{P} = n\vec{P}_i = n\beta\vec{D} = \chi\vec{D} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \qquad (5)$$

де $\chi = n\beta$ згідно з означенням діелектричної сприйнятливості.

(49) **Покажемо, що в діелектрику зовнішнє електричне поле послаблюється.**

Помістимо діелектрик (мал. 37, *а*) у зовнішнє електричне поле з напруженістю $\vec{E_0}$. Якщо цей діелектрик полярний, то поле «вишикує» усі молекули-диполі вздовж поля. Якщо діелектрик неполярний, то ефект буде такий самий, поле спочатку поляризує молекули, а потім «вишикує» їх уздовж ліній напруженості, як показано на мал. 37, *б*. З цього малюнка також видно, що всередині діелектрик залишається електронейтральним, а на поверхні виникають нескомпенсовані заряди протилежних знаків. Це спричинить виникнення внутрішнього електричного поля $\vec{E}'$, спрямованого проти зовнішнього поля (мал. 37, *в*), проте на відміну від ситуації у провіднику, де внутрішнє поле зростало доти, доки воно не зрівнялося з зовнішнім, у діелектрику це зростання внутрішнього поля буде обмежене здатністю цього діелектрика до орієнтування молекул-диполів вздовж поля.



Мал. 37

Насправді картина, показана на мал. 37, *б*, дуже ідеалізована, упорядкування диполів буде частковим, бо йому перешкоджатиме хаотичний тепловий рух молекул. Таким чином, внутрішнє поле $\vec{E}'$ буде мати певну величину, меншу за $\vec{E_0}$, причому в кожному діелектрику – свою.

У результаті накладання цих двох полів результативне поле в діелектрику послаблюється, причому в кожному діелектрику на іншу величину.

(50) **Покажемо, що поляризованість діелектрика дорівнює поверхневій густині індукованих на його поверхнях зарядів (поляризаційних зарядів).**

Уявімо собі діелектрик як один великий диполь, заряд якого q і плече l (мал. 37, *в*). Тоді його дипольний момент буде ql і поляризованість згідно з означенням

$$P = \frac{ql}{V} = \frac{q}{S} = \sigma.$$

(51) **Покажемо, що електричне поле послаблюється в діелектрику в ε разів.**

З мал. 37, *в* бачимо, що напруженість результативного поля в діелектрику

$$E = E_0 - E^{'}.$$

Але, оскільки поле $E^{'}$ створене поляризаційними зарядами з поверхневою густиною σ, то це поле, створене двома зарядженими площинами. Тому

$$E = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

Поляризованість діелектрика P ми виразимо через сумарну напруженість поля всередині діелектрика згідно з рівністю (5) і підставивши цю рівність в останню, дістанемо:

$$E = E_0 - \frac{\varepsilon_0 \chi E}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E,$$

звідки

$$E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Отже, відносна діелектрична проникність показує, у скільки разів електричне поле послаблюється у діелектрику.

(52) **Установимо зв'язок між вектором поляризації та вектором електричної індукції.**

Згідно з рівнянням (5), вектор поляризації

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E},$$

де $\vec{E}$ – напруженість поля в діелектрику, а вона, як відомо, пов'язана з вектором електричної індукції рівністю

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Дістанемо після підстановки

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\chi}{\varepsilon}\vec{D} = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\vec{D}.$$

(53) **Установимо, який вигляд мають співвідношення електростатики в діелектрику.**

Вектор електричної індукції з врахуванням (6)

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}_0 = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},$$

закон Кулона:

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = q_0\frac{\vec{E_0}}{\varepsilon} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}.$$

Теорема Остроградського–Гауса для вакууму:

$$div\vec{E_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Тоді в діелектрику

$$div\varepsilon\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

або

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отже, щоб із співвідношень електростатики для вакууму отримати співвідношення для діелектрика, слід формально зробити заміну ε_0 на $\varepsilon_0\varepsilon$.

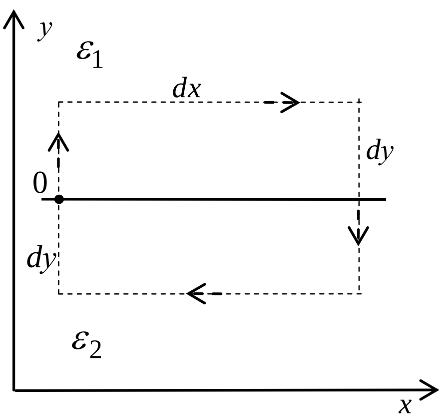
Тема 13. Електричне поле на межі середовищ

Задачі

(54) **На основі властивості потенціяльності електричного поля доведемо, що при переході з одного діелектрика в інший тангенціальна (дотична) складова вектора напруженості не змінюється, а така ж складова вектора індукції змінюється пропорційно до діелектричної проникності.**

Побудуємо на межі діелектрика прямокутний замкнений контур нескінченно малих розмірів (мал. 38) і застосуємо умову потенціяльності електричного поля

$$\oint E_l dl = 0.$$



Мал. 38

Починаємо інтегрування з точки *O*. Оскільки прямокутник нескінченно малий, то інтегрування зводиться до додавання скінченної кількості доданків. Остання рівність буде виглядати так:

$$E_{1y}dy + E_{1x}dx - E_{1y}dy - E_{2y}dy - E_{2x}dx + E_{2y}dy = 0,$$

де знак плюс ставиться тоді коли напрям обходу контура співпадає з додатнім напрямом осі і мінус – коли вони протилежні. Після спрощень

$$E_{1x}dx - E_{2x}dx = 0,$$

або

$$E_{1x} = E_{2x}.$$

Але E_{1x} і E_{2x} – це дотичні (тангенціяльні) складові вектора $\vec{E}$ в кожному з діелектриків, тому позначимо їх відповідно E_{1t} і E_{2t} і останню рівність напишемо так:

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{1}$$

Зі співвідношення $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ маємо

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}, \tag{2}$$

або

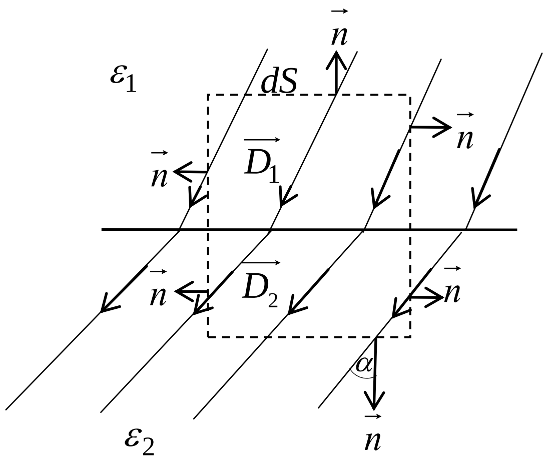
$$D_{2t} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{1t}.$$

(55) **На основі теореми Остроградського–Гауса доведемо, що при переході з одного діелектрика в інший нормальна складова вектора електричної індукції раптово змінюється на величину поверхневої густини вільних зарядів на межі середовищ.**

Виділимо на межі середовищ область, обмежену кубом, грані якого dS. Очевидно, що в межах цього нескінченно малого куба поле можна вважати однорідним.

Знайдемо потік вектора індукції через поверхню куба як суму потоків через його грані.

З мал. 39 бачимо, що потоки через бічні взаємно-протилежні грані однакові за величиною і протилежні за знаком, тому потік через поверхню куба – це потік через його основи. Ці потоки також протилежні за знаком, але вони різні за величиною. За теоремою Остроградського–Гауса



Мал. 39

$$-D_{1n}dS + D_{2n}dS = \sigma_0 dS,$$

де σ_0 – поверхнева густина вільних зарядів на межі середовищ.

З цієї рівності

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

або

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma_0, \qquad (3)$$

що означає, що на межі середовищ нормальна складова вектора $\vec{D}$ раптово змінюється на величину σ_0. Якщо вільних зарядів немає, то, як видно з останнього рівняння, нормальна складова вектора $\vec{D}$ не змінюється, тобто

$$D_{2n} = D_{1n}. \qquad (4)$$

У цьому випадку для векторів напруженості маємо співвідношення:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n},$$

тобто нормальна складова вектора напруженості змінюється обернено пропорційно до діелектричної проникності. Дійсно

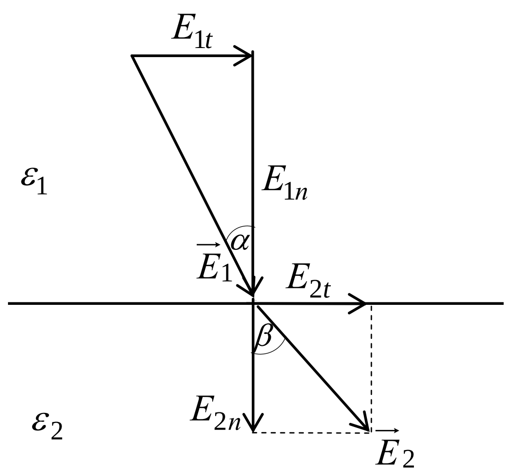
$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n}. \tag{5}$$

(56) **Доведемо, що вектор напруженості завжди нормальний до межі провідника з діелектриком.**

Нехай перше середовище – це діелектрик, а друге – провідник. Оскільки в провіднику поле відсутнє, то $E_{2t} = 0$ і $D_{2n} = 0$. З рівностей (1) і (3) відповідно маємо: $E_{1t} = 0$ і $D_{1n} = -\sigma_0$, що означає, що вектор напруженості в першому середовищі (діелектрику) є нормальним до межі середовищ. Зауважимо, що σ_0 в цьому випадку не може дорівнювати нулеві, бо на поверхні провідника в електричному полі обов'язково є індукований вільний заряд.

(57) **Виведемо закон заломлення силових ліній на межі двох діелектриків.**

З рівності (5) видно, що при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $E_{2n} < E_{1n}$, а з рівності (1) $E_{1t} = E_{2t}$, що свідчить про те, що вектор $\vec{E}$ у двох середовищах має різний напрям, тобто силові лінії заломлюються на межі середовищ (мал. 41). Установимо закон цього заломлення.



Мал. 41

З малюнка видно, що

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{E_{1t}}{E_{2t}} \frac{E_{2n}}{E_{1n}}.$$

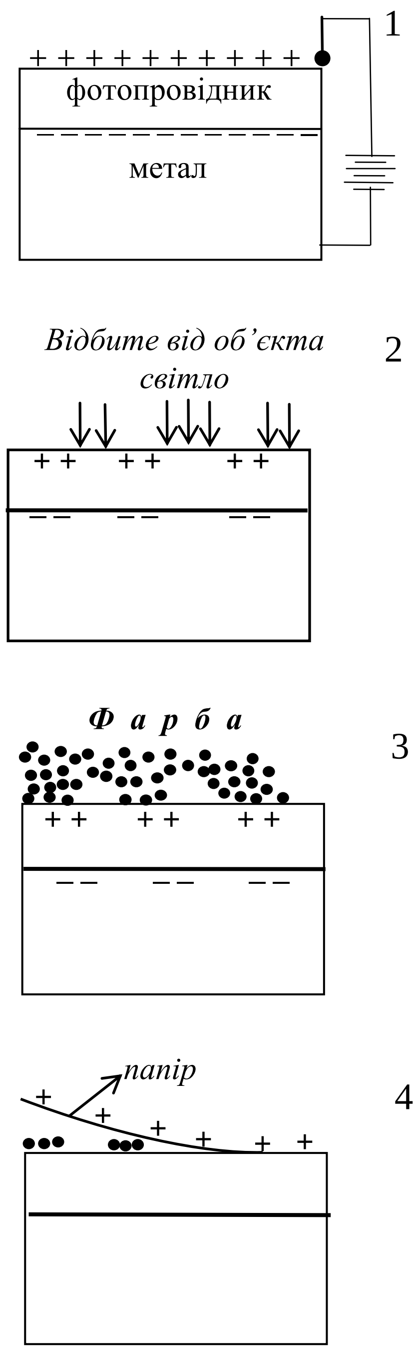
Враховуючи, що $E_{1t} = E_{2t}$, а

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

маємо:

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Порівнюючи цей закон заломлення силових ліній з відомим законом заломлення світла: $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$, бачимо, що на відміну від світла, яке за переходу в середовище з більшим показником заломлення заломлюється до нормалі, лінії напруженості за переходу в середовище з більшою діелектричною проникністю заломлюються від нормалі.



Мал. 42

(58) Пояснимо принцип електрофотографування (ксерографія).

Процес електрофотографування можна поділити на чотири етапи (мал. 42).

1. Заряджання фотопровідника. Провід під напругою приблизно +5000 В заряджає фотопровідник-речовину, яка в темноті є діелектриком, а при освітленні стає провідником. На межі металу і фотопровідника виникає індукований негативний заряд.
2. Освітлення фотопровідника відбитим від тексту світлом. При цьому у фото-

провіднику виникають вільні електрони і дірки, які рухаючись у протилежних напрямах, нейтралізують заряди в місці освітлення.

3. Нанесення на фотопровідник негативно зарядженої фарби. При цьому фарба притягується до областей, де залишився позитивний заряд (неосвітлені області).
4. Прикладання позитивно зарядженого паперу до розфарбованого фотопровідника.

Цей спосіб копіювання винайшов в 1937 році американський винахідник Честер Карлсон. Назва «ксерокопія» походить від назви компанії "Xerox", яка одна з перших розпочала масове виготовлення копіювальних машин.

Тема 14. Електроємність

Фізичні величини

- **Електроємність відокремленого провідника –** це відношення зміни заряду провідника до зміни його потенціялу, яка спричинена цією зміною заряду (позначення C).

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi}. \tag{1}$$

Якщо провідник був незаряджений, то його ємність очевидно означається так

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{2}$$

Фізичні системи й прилади

- **Конденсатор –** система двох електрично ізольованих один від одного провідників.

Задачі

(59) **Покажемо, що потенціял відокремленого провідника пропорційний до його заряду.**

Відомо, що будь-який провідник, заряджений чи ні, є еквіпотенціяльний, що означає, що потенціял у всіх його точках однаковий (задача 46). Крім того відомо, що заряд розміщується лише на поверхні провідника (задача 44).

На основі принципу додавання потенціялів, потенціял у будь-якій точці провідника буде дорівнювати сумі потенціялів, створених елементами заряду dq:

$$\varphi = \int_S \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_S \frac{\sigma dS}{r},$$

де σ – поверхнева густина заряду на провіднику, S – площа поверхні провідника.

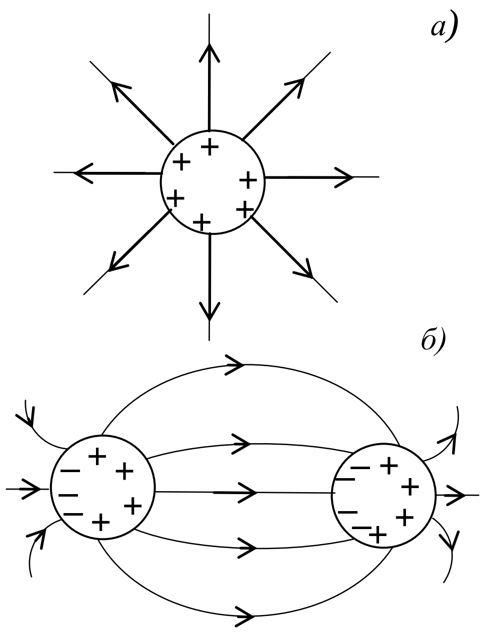
Але поверхнева густина заряду пропорційна до величини заряду q, тобто $\sigma \sim q$ або $\sigma = kq$, де k – коефіцієнт, який не обов'язково є сталим, а може і залежати від S. Тому

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_S \frac{kdS}{r}.$$

Оскільки вираз $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_S \frac{kdS}{r}$ – це число, то $\varphi \sim q$.

(60) **Покажемо: якщо поблизу провідника розмістити інший провідник, то його ємність збільшиться.**

На мал. 43, (а) показано відокремлений заряджений провідник і його поле. Якщо поблизу цього провідника розмістити інший незаряджений провідник, то внаслідок виникнення на ньому індукованого заряду поле між провідниками підсилюється, а за ними послаблюється, тому заряд на першому провіднику перерозподілиться (мал. 43, (б)). Щодо потенціялу в будь-якій точці першого провідника (пам'ятаємо, що він всюди однаковий), то бачимо, що згідно з принципом додавання потенціялів, його алгебраїчна сума зменшиться і ємність згідно з її означенням зросте. Очевидно, що цей ефект збільшення ємності провідника під впливом іншого провідника буде тим більший, що ближче будуть один до одного ці провідники і що більші їхні площі будуть розташовані одні навпроти одних. Оскільки така система двох провідників – це конденсатор, то бачимо, що ємність конденсатора може бути значно більшою за ємність відокремленого провідника.



Мал. 43

(61) **Установимо вираз для електроємності провідної кулі та сфери і обчислимо ємність Землі.**

Якщо кулі надати заряду q, то її потенціял буде φ, причому він буде однаковий в усіх точках кулі (задача 45). Найлегше нам знайти потенціял у центрі кулі. Оскільки заряд розміститься на поверхні кулі (задача 44), то потенціял у її центрі створюється зарядом її поверхні. Кожен елементарний заряд поверхні dq створює у центрі кулі потенціял $d\varphi = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$, де R – радіус кулі, а весь заряд кулі створює потенціял

$$\varphi = \int_S \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Згідно з означенням ємності

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

Щодо сфери, то заряд на сфері розміститься так само, як і на кулі і потенціял всередині сфери буде такий самий, як і всередині кулі, тому ємність сфери така ж, як і ємність кулі такого ж радіуса.

Якщо сфера заповнена діелектриком з діелектричною проникністю ε, то очевидно її ємність:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

За цією формулою ємність Земної кулі

$$C = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{6} \approx 7 \cdot 10^{-4}\ \Phi = 700\ (\text{мк}\Phi).$$

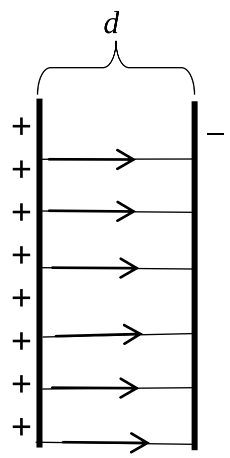
Тема 15. Конденсатори

Задачі

(62) **Установимо вираз для ємності плоского конденсатора.**

Згідно з означенням ємності

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi},$$



Мал. 44

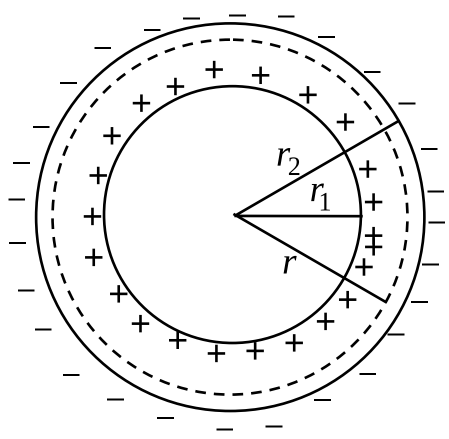
де $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів між обкладками конденсатора (мал.. 44), яка за формулою зв'язку між напруженістю і потенціялом може бути представлена як Ed. Своєю чергою напруженість електричного поля E між обкладками конденсатора дорівнює $\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ як напруженість поля двох нескінченних площин. Отже

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{Ed} = \frac{q\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma d} = \frac{\sigma S\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

де S – площа однієї з обкладок.

(63) **Установимо вираз для ємності циліндричного конденсатора довжина якого значно більша за радіуси циліндрів.**

Спочатку встановимо вираз для потенціялу будь-якої точки між двома циліндрами (мал. 45). Для цього встановимо вираз для напруженості поля. Напруженість поля в цій точці, створена зовнішнім циліндром згідно з теоремою Остроградського–Гауса дорівнює нулеві, бо потік напруженості електричного поля зовнішнього циліндра дорівнює нулеві тому, що під цією поверхнею немає електричних зарядів. У результаті напруженість поля між циліндрами – це напруженість, створена внутрішнім циліндром, і за тією ж теоремою Остроградського –Гауса (задача 28)



Мал. 45

$$E = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

З формули зв’язку напруженості і потенціялу знайдемо потенціял у цій же точці:

$$d\varphi = -Edr = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0\varepsilon r}dr,$$

звідки

$$\varphi(r) = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} ln r + K.$$

Сталу інтегрування K знайдемо з умови $r = r_2$, $\varphi = 0$, тобто приймаємо потенціял одного з циліндрів, а саме зовнішнього за нуль. Після підстановки маємо $K = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} ln r_2$ і вираз для потенціялу набирає вигляду:

$$\varphi(r) = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} ln \frac{r_2}{r},$$

звідки потенціял зовнішнього циліндра щодо внутрішнього:

$$\varphi = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тепер можемо написати і вираз для ємності:

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon q}{\sigma_1 r_1 ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon q S_1}{q r_1 ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon 2\pi r_1 h}{r_1 ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon h}{ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Очевидно, що ця формула правильна і для коаксіального кабеля.

Розглянемо випадок коли відстань між циліндрами $r_2 - r_1 = d$ значно менша за їхні радіуси.

Скориставшись з наближеної формули для обчислення логаритма, а саме, що за близьких значень r_1 і r_2: $ln \frac{r_2}{r_1} \approx \frac{r_2 - r_1}{r_1}$, матимемо

$$C = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon h \frac{r_1}{r_2 - r_1}.$$

Врахувавши те, що $2\pi h r_1$ це площа S однієї з обкладок і $r_2 - r_1 = d$, остаточно маємо:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

як і для плоского конденсатора.

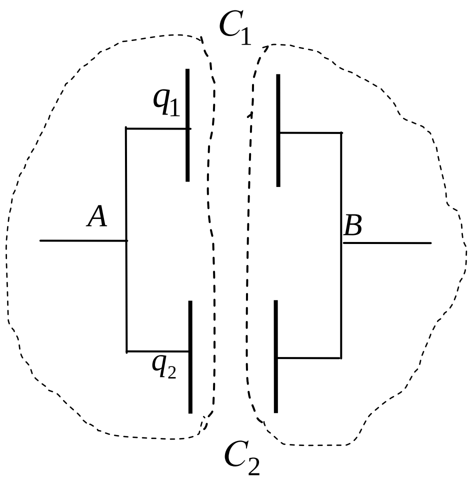
(64) **Доведемо, що за паралельного з’єднання двох чи більше конденсаторів ємність цієї ділянки кола дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів.**

Будемо розглядати цю ділянку кола як один великий конденсатор з двома ізольованими один від одного провідниками A і B (ці провідники обведені на мал. 46 замкнутими штрихованими лініями).

Згідно з означенням ємності, ємність цього конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi},$$

де q – заряд на одній з обкладок цього великого конденсатора, $\Delta\varphi$ – різниця потенціялів між його обкладками. Враховуючи очевидні факти, що $q = q_1 + q_2$ і $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$, дістанемо:



Мал. 46

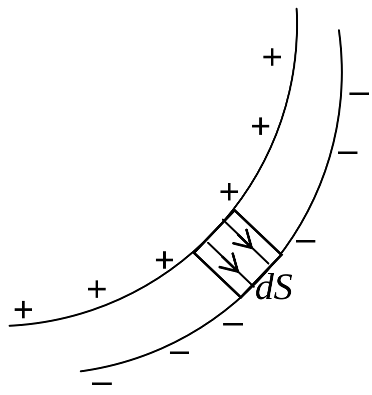
$$C = \frac{q_1 + q_2}{\Delta\varphi} = \frac{q_1}{\Delta\varphi} + \frac{q_2}{\Delta\varphi} = C_1 + C_2.$$

За більшої кількості конденсаторів нічого не зміниться, тому

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

(65) **Покажемо, що ємність конденсатора будь-якої форми за умови, що відстань між його обкладками є значно меншою за їхні розміри, дорівнює ємності плоского конденсатора з такою ж площею обкладок і відстанню між ними.**

Уявімо конденсатор будь-якої форми як систему паралельно з'єднаних плоских елементарних конденсаторів з площею обкладок dS (мал. 47). Оскільки відстань між обкладками мала, поле в межах одного елементарного конденсатора можна вважати однорідним. Тому ємність кожного елементарного конденсатора dC – це ємність плоского конденсатора



Мал.47

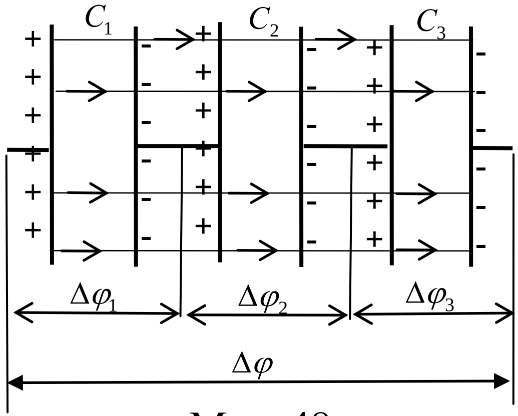
$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} dS.$$

За паралельного з'єднання ємності додаються, тому

$$C = \int_S \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} dS = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} S.$$

(66) **Доведемо, що за послідовного з'єднання двох чи більше конденсаторів обернена ємність цієї ділянки кола дорівнює сумі обернених ємностей окремих конденсаторів.**

Якщо в цьому випадку одному конденсатору надати заряду q, то такий самий заряд буде індукований на всіх конденсаторах (мал. 48). Батарею послідовно з'єднаних конденсаторів розглядатимемо як один конденсатор із зарядами обкладок $+q$ та $-q$ (поля



Мал. 48

зарядів усіх інших обкладок компенсують одне одного).

За означенням ємності, ємність батареї

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + ... + \Delta\varphi_n}.$$

За тим самим означенням ємності

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1},\ \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2},\quad \Delta\varphi_n = \frac{q}{C_n},$$

і тоді

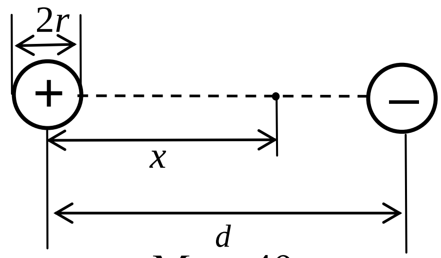
$$C = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + ... + \frac{q}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}},$$

звідки маємо

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}.$$

(67) **Установимо вираз для ємності двохпровідної лінії, тобто системи двох паралельних проводів довжиною l радіусами r, відстань між осями яких d, причому розглянемо практичний випадок коли $d >> r$.**

Спочатку знайдемо вираз для напруженості електричного поля, створеного одним з проводів у будь-якій точці на прямій, що з'єднує два проводи, що на відстані x від одного з них (мал. 49). Для цього скористаємося виразом для напруженості поля рівномірно зарядженого циліндра (задача 27) (зауважимо,



Мал. 49

що практична рівномірність розподілу заряду на проводі забезпечується умовою $d >> r$), яка в нашому випадку буде мати вигляд:

$$E_+ = \frac{\sigma r}{\varepsilon_0 x},$$

Підставивши в останню рівність вираз для поверхневої густини заряду на циліндрі $\sigma = \frac{q}{2\pi r l}$, де l – висота циліндра, а в нашому випадку довільна довжина ділянки двохпровідної лінії, дістанемо

$$E_+ = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l x}.$$

Другий провід, очевидно, створює у цій точці напруженість поля

$$E_- = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l(d-x)}.$$

Тому сумарна напруженість поля в цій точці

$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right).$$

Підставивши у цей вираз $E = \frac{d\varphi}{dx}$, дістанемо

$$d\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx,$$

звідки інтегруванням установимо залежність потенціялу від відстані x:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} ln\frac{x}{d-x} + K.$$

Сталу K знайдемо з умови $x = r$ $\varphi = 0$, що означає, що за нуль потенціялу приймемо потенціял на поверхні одного з проводів. Дістанемо $K = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} ln \frac{d - r}{r}$, а після підстановки цього виразу в отриману залежність $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} ln \frac{x(d - r)}{(d - x)r}.$$

Маючи цю залежність можемо визначити потенціял φ на поверхні другого проводу, тобто потенціял за умови $x = d - r$

$$\varphi(d - r) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 l} ln \frac{(d - r)}{r} \approx \frac{q}{\pi\varepsilon_0 l} ln \frac{d}{r}.$$

Оскільки потенціял першого проводу ми прийняли за нуль, то ця величина є різницею потенціалів між проводами, тому згідно з означенням ємності

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{ln \frac{d}{r}}.$$

Ємність, що припадає на одиницю довжини лінії

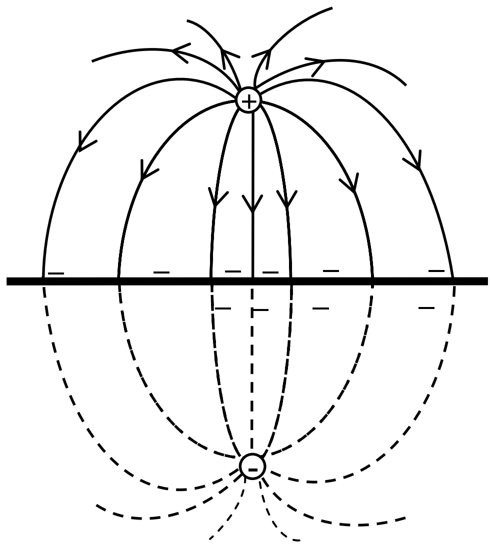
$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\varepsilon_0}{ln \frac{d}{r}}.$$

(68) **Установимо вираз для ємності однопровідної лінії довжиною l і радіусом проводу r, що знаходиться на висоті h над землею.**

Застосуємо метод дзеркальних зображень. Згідно з цим методом, електричне поле, створене зарядженим проводом та індукованим зарядом на поверхні землі, співпадає з електричним полем, створеним двома проводами з однаковими за величиною та протилежними за знаками зарядами (мал. 50).

Тому застосуємо вираз для різниці потенціялів між двома проводами (задача 67):

$$\varphi = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 l} ln \frac{d}{r}.$$



Мал. 50

Але нас цікавить різниця потенціялів між проводом та землею і вона, очевидно, дорівнює половині різниці потенціялів між проводом і його зображенням. Тоді, врахувавши це за означенням ємності,

$$C = 2\frac{q}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{ln\frac{2h}{r}}.$$

Ємність одиниці довжини проводу:

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\frac{2h}{r}}.$$

Тема 16. Потенціяльна енергія взаємодії точкових зарядів. Енергія електричного поля

Фізичні поняття

• **Потенціяльна енергія заряду в заданій точці електричного поля –** це робота, яку слід виконати, щоб перенести цей заряд з цієї точки у нескінченність (позначення W).

Фізичні величини

• **Об'ємна густина енергії електричного поля –** енергія, розрахована на одиницю об'єму зайнятого полем (позначення w).

Задачі

(69) **Установимо вираз для потенціяльної енергії взаємодії** n **точкових зарядів.**

Спочатку розглянемо систему з двох зарядів. Перший заряд q_1 будемо вважати джерелом поля. Тоді потенціяльна енергія другого заряду q_2 в полі першого, згідно з означенням потенціялу, буде

$$W = \varphi_1 q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

де замість φ_1 ми підставили відомий вираз для потенціялу поля точкового заряду. З іншого боку, оскільки заряди q_1 та q_2 рівноправні, то вважаючи навпаки другий заряд джерелом поля, отримаємо такий самий вираз

$$W = \varphi_2 q_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Отже, потенціяльна енергія другого заряду в полі першого дорівнює потенціяльній енергії першого заряду в полі другого, тому її ми можемо трактувати як потенціяльну енергію взаємодії двох точкових зарядів. Цю енергію можна подати ще так:

$$W = \frac{1}{2}(\varphi_1 q_2 + \varphi_2 q_1),$$

А для системи n точкових зарядів

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\varphi_i q_k \quad (i\neq k).$$

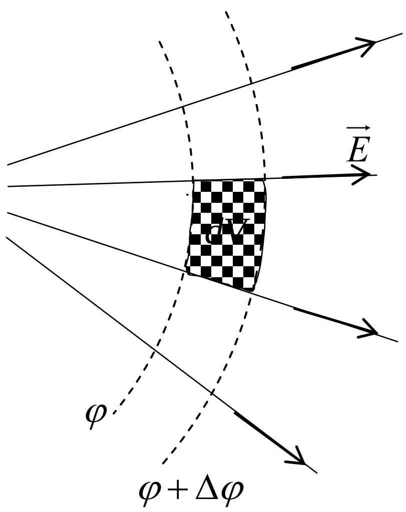
(70) **Установимо вираз для густини потенціяльної енергії електричного поля.**

Спочатку зробимо це для однорідного поля (поля плоского конденсатора). Для цього застосуємо послідовно формулу енергії плоского конденсатора, формулу зв’язку напруженості і напруги та формулу для ємності плоского конденсатора. Отримаємо

$$W=\frac{CU^2}{2}=\frac{CE^2d^2}{2}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{2d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2V,$$

де $V=Sd$ – об’єм конденсатора.

Якщо поле неоднорідне, то виділимо в ньому нескінченно малий об’єм, обмежений двома нескінченно близькими еквіпотенціяльними поверхнями та площинами нормальними до них, які проходять через силові лінії (мал. 52). Такий об’єм можна вважати плоским конденсатором з обкладками на еквіпотенціяльних поверхнях, бо будь-яку еквіпотенціяльну поверхню можна замінити на реальну провідну поверхню з тим самим потенціялом. Енергія цього конденсатора



Мал. 52

$$dW=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2dV,$$

а енергія електричного поля в об’ємі V

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon\int_V E^2 dV.$$

Діленням передостаннього рівняння на dV отримаємо формулу для обчислення об'ємної густини енергії

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}.$$

(71) **Установимо вираз для потенціяльної енергії зарядженого провідника та конденсатора.**

Щоб перенести заряд dq з провідника в нескінченість, слід, згідно з означенням потенціялу, виконати роботу

$$dA = \varphi dq,$$

або представивши φ згідно з означенням ємності $C = \frac{q}{\varphi}$,

$$dA = \frac{q}{C}dq.$$

Щоб перенести весь заряд q, слід виконати роботу:

$$A = \int_0^q \frac{q}{C}dq = \frac{q^2}{2C},$$

яка за означенням потенціяльної енергії і є потенціяльною енергією зарядженого провідника:

$$W = \frac{q^2}{2C}, \tag{5}$$

або, взявши до уваги означення ємності $C = \dfrac{q}{\varphi}$,

$$W = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \tag{6}$$