ДРОГОБИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

Інститут фізики, математики, економіки та інноваційних технологій

ЗАТВЕРДЖУЮ
директор інституту фізики, математики,
економіки та інноваційної технологій
_____ Галь Ю.М.

Програма кваліфікаційного екзамену

для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Галузь знань 0402 Фізико-математичні науки
Напрям підготовки «6.040201 Математика*»,
Спеціальність «Математика та інформатика»

Розглянуто на засіданні Вченої ради ІФМЕІТ
(протокол № 3 від 26.03.2019 р.)

Дрогобич 2019

ЗМІСТ

Пояснювальна записка 3

Розділ 1. Математичний аналіз. Функціональний аналіз. Комплексний аналіз. Диференціальні рівняння. Теорія ймовірностей і математична статистика……4
1.1. Загальні положення.
1.2. Основні факти і теореми.
1.3. Зразки завдань.
1.4. Зразки задач.
1.5. Зразки відповідей
1.6. Рекомендована література.
Розділ 2. Лінійна алгебра. Алгебра і теорія чисел……37
2.1. Загальні положення.
2.2. Лінійна алгебра. Основні факти.
2.3. Лінійна алгебра. Зразки завдань.
2.4. Лінійна алгебра. Зразок оформлення розв'язання.
2.5. Лінійна алгебра. Рекомендована література.
2.6. Алгебра і теорія чисел. Основні факти.
2.7. Алгебра і теорія чисел. Зразки завдань.
2.8. Алгебра і теорія чисел. Зразок оформлення розв'язання.
2.9. Алгебра і теорія чисел. Рекомендована література.
Розділ 3. Аналітична геометрія. Проективна геометрія та основи геометрії. Диференціальна геометрія і топологія……68
3.1. Загальні положення
3.2. Основні факти і теореми
3..3. Аналітична геометрія. Зразки задач.
3.4. Проективна геометрія та основи геометрії. Зразки задач.
3..5. Диференціальна геометрія та топологія. Зразки задач.
3.6. Аналітична геометрія. Зразки відповідей
3.7. Проективна геометрія та основи геометрії. Зразки відповідей
3.8. Диференціальна геометрія і топологія. Зразки відповідей
3.9. Аналітична геометрія. Рекомендована література.
3.10. Проективна геометрія та основи геометрії. Рекомендована література.
3.11. Диференціальна геометрія і топологія. Рекомендована література.
Розділ 4. Методика навчання математики в школі та елементарна математика….108
4.1. Загальні положення.
4.2. Методика навчання математики в школі. Основні факти і поняття.
4.3. Методика навчання математики в школі. Тестові завдання з вибором декількох правильних відповідей.
4.4. Методика навчання математики в школі. Тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді.
4.5. Методика навчання математики в школі. Завдання для перевірки практичних умінь та навичок.

4.6. Методика навчання математики в школі. Зразки оформлення відповіді.

4.7. Елементарна математика. Основні факти.
4.8. Елементарна математика. Зразки завдань з елементарної математики (алгебра).
4.9. Елементарна математика. Зразки завдань з елементарної математики (геометрія).
4.10. Методика навчання математики в школі. Рекомендована література.
4.11. Елементарна математика. Рекомендована література.
Розділ 5. Інформатика та методика її викладання
5.1.Методика викладання інформатики. Зразки теоретичних питань.
5.2.Завдання для програмної реалізації.

Пояснювальна записка

Метою державного екзамену з математики і методики навчання математики є перевірка рівня загальної математичної культури випускників і фактичних знань, умінь та навичок з фундаментальних розділів математики та методики навчання математики, які необхідні при викладанні математики в середніх навчальних закладах освіти та є базовими для успішного продовження навчання в магістратурі. Програма державного екзамену містить основні питання з курсів математичного аналізу, диференціальних рівнянь, комплексного аналізу, функціонального аналізу, теорії ймовірностей і математичної статистики, лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, диференціальної геометрії, проективної геометрії, основ геометрії, топології, елементарної математики, методики навчання математики. На державному екзамені студент повинен продемонструвати вміння формулювати означення, аксіоми і теореми, наводити при необхідності ілюстрації, приклади, контрприклади, доводити теореми і застосовувати відповідні факти при розв'язуванні конкретних математичних та прикладних задач.

Державний екзамен з математики і методики навчання математики дозволяє визначити готовність випускників до проведення навчальної роботи за фахом в загальноосвітній школі II ступеня, а також оцінити рівень фундаментальної підготовки випускників. Програма включає чотири розділи. Екзамен проводиться в письмовій формі. Кожен білет державного екзамену містить 10 завдань(чотири завдання з 1 розділу, 2 завдання з 2 розділу, два завдання з 3 розділу, два завдання з 4 розділу). Повна відповідь на кожне завдання оцінюється 10 балами; 8 балів — повне і правильне розв’язання, наявність незначних логічних неточностей в обґрунтуваннях або незначних технічних помилок; 6 балів — частково правильна відповідь або розв’язання (містить деякі правильно виконані кроки), наявні помилки або відсутні деякі кроки розв’язання; 4 бали — наявність помилок в розв’язанні (відсутні або неправильні деякі кроки); 0 балів — неправильна або відсутня відповідь. Тривалість підготовки до відповіді на державному екзамені — 2 години.

Оцінка "2" (незадовільно)	F	0-29
	FX	30-49
Оцінка "3" (задовільно)	E	50-59
	D	60-69
Оцінка "4" (добре)	C	70-79
	B	80-89
Оцінка "5" (відмінно)	A	90-100

2. ПРОГРАМА ДЕРЖАВНОГО ЕКЗАМЕНУ З МАТЕМАТИКИ

Розділ 1. Математичний аналіз. Функціональний аналіз. Комплексний аналіз. Диференціальні рівняння. Теорія ймовірностей і математична статистика

1.1. Загальні положення.

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями (функція, оператор, функціонал, послідовність, ряд, границя, неперервність, похідна, інтеграл, міра Лебега, ймовірностей простір); мати чітке уявлення про основні типи метричних просторів, основні методи комплексного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики; володіти навичками дослідження просторів, операторів елементарних функції дійсної та комплексної, методами обчислення границь, похідних, інтегралів; вміти розв'язувати найпростіші типи диференціальних рівнянь і застосування теоретичні факти до розв'язування практичних задач.

1.2. Основні факти і теореми.

1. Множини. Поняття множини. Операції над множинами. Числові множини. Поняття потужності множини. Зліченні та незліченні множини. Потужності множин натуральних, цілих, раціональних, дійсних та комплексних чисел.

2. Розвиток поняття числа. Множина дійсних чисел та її підмножини. Властивості дійсних чисел, принцип вкладених проміжків. Найбільший і найменший елемент множини. Межі(грані) числових множин. Різні форми властивості неперервності множина дійсних чисел. Принцип і метод математичної індукції. Комплексні числа та операції над ними, форми їх запису, модуль і аргумент комплексного числа, формули Ейлера.

3. Поняття функції. Числові функції. Композиція функцій, обернена функції. Класифікація функцій. Основні елементарні функції, їхні властивості. Графіки основних елементарних функцій дійсної змінної.

4.Границя послідовності. Нескінченно малі і обмежені послідовності. Основні теореми про границю послідовності. Монотонні послідовності. Число e. Критерій Коші збіжності послідовності.

5. Границя та неперервність функції однієї дійсної змінної. Різні означення границі та неперервності функції в точці та їх еквівалентність. Властивості границь, основні границі. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку (інтервалі).

6. Похідна і диференціал функції. Означення похідної. Диференційовність функції однієї змінної. Основні властивості диференційовних функцій (теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Формула Тейлора). Застосування похідної, екстремуми, умови сталості, монотонності, опуклості, існування асимптот.

7. Невизначений інтеграл. Визначений інтеграл (інтеграл Рімана) функцій однієї змінної, основні властивості та застосування.

8. Числові ряди, умови збіжності. Функціональні ряди та послідовності, рівномірна збіжність. Степеневі ряди проміжок і радіус збіжності. Ряд Тейлора, розвинення функцій в ряд Тейлора.

9. Границя, неперервність і диференціал функцій багатьох змінних.

10. Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли.

11. Міра Жордана і міра Лебега. Інтеграл Лебега.

12. Скалярний добуток, норма та відстань. Евклідові, нормовані та метричні простори. Повні метричні простори. Простори $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C[a;b]$, $L_p(a;b)$, l_p. Гільбертові і Банахові простори. Компактність. Оператори, границя і неперервність. Стискуючі оператори, метод послідовних наближень, теорема С. Банаха.

13. Лінійні функціонали і оператори, норма функціонала, норма, спектр і резольвента лінійного обмеженого оператора. Рівняння Фредгольма і Вольтерра. Спряжений простір, сильна та слабка збіжності.

14. Елементарні функцій комплексної змінної. Границя послідовності і числові ряди з комплексними членами. Границя, неперервність, похідна і інтеграл функції комплексної змінної, умови Коші –Рімана. Поняття про конформні відображення. Голоморфні (аналітичні) функції. Інтегральна теорема та інтегральна формула Коші. Функціональні ряди з комплексними членами, степеневий ряд і ряд Тейлора. Розвинення голоморфних функцій в ряд Тейлора. Нулі, особливі точки та лишки.

15. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Основні поняття. Теорема про існування та єдиність розв'язку. Найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку. Застосування до розв’язування прикладних задач.

16. Диференціальні рівняння вищих порядків. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків, структура загального розв'язку. Диференціальні рівняння другого порядку, основні типи, задача Коші, крайові задачі, застосування до розв’язування прикладних задач.

17. Випадкові події і статистичні ймовірності. Поняття випадкової події. Операції над подіями. Статистична ймовірність події та її властивості. Ймовірнісні простори. Умовна статистична ймовірність, формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса. Поняття дискретного та неперервного розподілів статистичних ймовірностей. Щільність розподілу статистичних ймовірностей та її властивості. Функція дискретного та неперервного розподілів статистичних ймовірностей. Числові характеристики дискретних та неперервних розподілів статистичних ймовірностей.

18. Аксіоматична побудова теорії ймовірностей. Випадкові величини. Ймовірність випадкової події та її властивості. Умовні ймовірності. Залежні і незалежні випадкові події. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Поняття випадкової величини. Розподіли ймовірностей випадкових величин. Числові характеристики розподілів ймовірностей випадкових величин. Нормальний розподіл ймовірностей та його параметри. Закон великих чисел. Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Теорема Бернуллі. Центральна гранична теорема.

1.3. Зразки завдань.

1. Опишіть геометричний зміст числа $|x-y|$.
2. Скільки ірраціональних чисел належать множині $A=\{x:|x+2|\le\sqrt{3}\}$?
3. Вкажіть два раціональних числа, добуток яких є раціональним числом.
4. Розв’яжіть нерівність $1<(x-1)^2<4$.
5. Зясуйте, чи існує найменше раціональне число, яке є більшим за $0,2$.
6. Доведіть нерівність $|1-3x|\le|2x-1|+|x|$.
7. Знайдіть точну верхню і точну нижню межі множини периметрів всіх правильних 2^{n+1}-кутників, $n\in\mathbb{N}$,описаних навколо круга радіуса R.
8. З’ясуйте, чи множина $H=\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k : n\in\mathbb{N}\right\}$ є обмеженою. Знайдіть $\sup H$ та $\inf H$ і з’ясуйте, чи $\max H=\sup H$ і $\inf H=\min H$.
9. З’ясуйте, чи обмеженою в $\mathbb{R}$ є множина $A=\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin k}{3^k} : n\in\mathbb{N}\right\}$.
10. Знайдіть $\min A$, $\inf A$, $\max A$ і $\sup A$, якщо $A=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$.
11. Знайдіть $\min A$, $\inf A$, $\max A$ і $\sup A$, якщо $A=\{x\in\mathbb{R}:|x-2|<1\}\cap\mathbb{Q}$.
12. Наведіть приклад відкритої множини $E\in\mathbb{R}$, яка має найменший елемент.

13. Вкажіть множину, звуження на яку функції $f(x)=x^2+2x-3$ є оборотною функцією.
14. Доведіть, що множини $H_1=(0;+\infty)$ і $H_2=(-\infty;+\infty)$ є еквівалентними.
15. Множина всіх раціональних чисел є зліченною. Доведіть це твердження.
16. Наведіть приклад незліченної множини, яка міститься у проміжку $\left(1;\frac{7}{3}\right)$.
17. Сформулюйте означення границі послідовності.
18. Наведіть приклад обмеженої розбіжної послідовності.
19. Наведіть приклад обмеженої послідовності, яка має три часткові границі.
20. Наведіть приклад розбіжних в $\mathbb{R}$ послідовностей (x_n) і (y_n), для яких послідовність (x_n+y_n) є збіжною.
21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Доведіть це твердження.
22. Границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ існує . Доведіть це твердження.
23. Завершіть написання рівності $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=$ і обґрунтуйте її.
24. Завершіть написання рівності $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=$
25. Завершіть написання рівності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+3n}\right)^n=$.
26. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ і $(\exists n_0)(\forall n\ge n_0): x_n<y_n$. Чи можна стверджувати, що: 1) $a<b$; 2) $a\le b$; 3) $a=b$?
27. В будь-якому ε-околі точки a міститься нескінченна кількість членів послідовності (x_n). Чи можна стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?
28. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2}+x_{n-1})$.
29. Наведіть приклад послідовності (x_n), для якої $(\forall\varepsilon>0)(\exists n^{\bullet}\in\mathbb{N})(\forall n\ge n^{\bullet}): x_n<\varepsilon$.
30. Зовні деякого ε-окола точки 2 лежить один член послідовності (x_n). Чи є послідовність (x_n): а) збіжною; б) обмеженою?
31. Наведіть приклад немонотонної послідовності (x_n), для якої $(\exists n\in\mathbb{N}): x_n<x_{n+1}$.
32. Наведіть приклад двох неспадних послідовностей, добуток яких є спадною послідовністю.
33. Якщо збіжною є послідовність (x_n), то збіжною є і послідовність $(|x_n|)$.Доведіть це твердження.
34. Відомо, що послідовність $(|x_n|)$ є збіжною і має границю a. Що можна сказати про збіжність послідовності (x_n)?
35. Сформулюйте і доведіть теорему про границю суми послідовностей.
36. Сформулюйте і доведіть теорему про існування границі монотонної послідовності.
37. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$. Доведіть це твердження.
38. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$. Доведіть це твердження.
39. Вкажіть ті члени послідовності (x_n), які належать ε-околу точки a, якщо $x_n=1-1/n$, $\varepsilon=1$ і $a=1$.
40. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2}}{1+3n^2}$.
41. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$.

42. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}2^{k-1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}3^{k-1}}$.

43. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{2+4n^2}$.

44. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+1}{4^n}\right)^n$.

45. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n+5}$.

46. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\cos n}{n^2+1}+\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{3n+1}\right)$.

47. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+3^n}{3^n-2^n}+\dfrac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{6n^2+6n}\right)$.

48. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

49. З'ясуйте, чи послідовність $\left(\dfrac{(-1)^n2^n+3}{2^n+1}\operatorname{arctg}n\right)$ є обмеженою.

50. З'ясуйте, чи послідовність $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos k}{5^k+k}\right)$ є обмеженою.

51. Відомо, що послідовність (x_n) задовольняє умову $(\forall\varepsilon>0)(\exists n^{\bullet}\in\mathbb{N})(\forall n\ge n^{\bullet})(\forall m\ge n^{\bullet}):|x_n-x_m|<\varepsilon$. Що можна сказати про збіжність послідовності (x_n)?

52. Послідовність $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos k}{2^k}\right)$ є збіжною в $\mathbb{R}$. Доведіть це твердження.

53. Знайдіть всі часткові границі послідовності $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{4}+1$.

54. Вкажіть множину (область) визначення і множину значень функції $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg}x}$.

55. Зобразіть графік функції $y=-|x-2|$.

56. Зобразіть графік функції $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

57. Якщо $f(x)=\arcsin x$, то $f([2;3])=\varnothing$, $f([0;2])=[0;\pi/2]$, $f^{-1}([3;4])=\varnothing$ і $f^{-1}([\pi/6;\pi])=[1/2;1]$. Вкажіть правильні твердження.

58. Будь-яке раціональне число є періодом функції Діріхле $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ÿêù î } x-\text{ðàö³î í àëüí å},\\ 0, & \text{ÿêù î } x-\text{³ððàö³î í àëüí å}.\end{cases}$ Доведіть це твердження.

59. Наведіть приклад функції, яка зростаючою на деяких проміжках $(a_1;b_1)$ і $(a_2;b_2)$, але не є зростаючою на множині $H=(a_1;b_1)\cup(a_2;b_2)$.

60. Існує функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка не є парною і $(\exists x\in D(f)):f(-x)=f(x)$. Чи є справедливим це твердження?

61. Існує неперіодична функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для якої $(\forall x\in D(f))(\exists T\ne 0):f(x\pm T)=f(x)$. Чи є справедливим це твердження?

62. Зобразіть на одному малюнку графіки функцій $f_1(x)=x^2$ і $f_2(x)=x^4$.

63. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, якщо $f(x)=\begin{cases} 2x, x\in(-\infty;1), \\ 3, x=1, \\ 2x, x\in(1;+\infty). \end{cases}$

64. Знайдіть всі точки неперервності функції $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

65. Знайдіть множину (область) визначення функції f_1+f_2, якщо $f_1(x)=\arcsin\sqrt{x}$, $f_2(x)=\sqrt{\arccos x}$.

66. Знайдіть множину, на якій функція $f_1(x)=x^2$ приймає більші значення, ніж функція $f_2(x)=4$.

67. Функція $f(x)$ має обернену тоді й тільки тоді, коли вона зростаюча або спадна функція. Чи правильне є це твердження ?.

68. Сформулюйте відомі Вам означення границі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

69. Сформулюйте і доведіть теорему про границю добутку функцій.

70. Наведіть приклад функції, для якої $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ і $f(2)=-3$.

71. Існує функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для якої знайдуться такі числа $a\in\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}$ і послідовність (x_n), що $x_n\neq a$ для всіх $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, але число A не є границею цієї функції f у точці a. Чи є справедливим це твердження?

72. $0<1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x$ для всіх $x\in(0;\pi/2)$. Чи є справедливим це твердження?

73. Існують такі функції $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що φ є обмеженою в точці a, f є нескінченно великою в точці a і $f\varphi$ є нескінченно малою функцією в цій точці. Чи є справедливим це твердження?

74. Для яких $n\in\mathbb{N}$ функція $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ є обмеженою на $\mathbb{R}$?.

75. Завершіть написання рівності $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=$ обґрунтуйте її.

76. Завершіть написання формули: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=$ і обґрунтуйте її.

77. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{\pi x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$.

78. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

79. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

80. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

81. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

82. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-20x+3}{3x^2+2x+3}$.

83. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{2x}$.

84. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+2x^2\right)}{x\sin x}$.

85. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$.

86. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{2x}}{x}$.

87. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

88. Знайдіть границю $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^{11}-1}{y-1}$.

89. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-x^3+20}{x^2+3x^3+1}$.

90. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

91. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

92. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x+1}$.

93. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)^{x+1}$.

94. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{1/x}$.

95. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

96. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} 2x}-1}{x\sqrt{2}}$.

97. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x2^x\right)}{x}$.

98. Існують функції $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які є ні спадними ні зростаючими на $\mathbb{R}$, для яких функція $F=f+\varphi$ є зростаючою $\mathbb{R}$. Доведіть це твердження.

99. Сформулюйте відомі Вам означення неперервності функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

100. Знайдіть границю точки розриву функції $f(x)=e^{x-\frac{1}{x}}$ і з'ясуйте їх характер.

101. Знайдіть границю точки розриву функції $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$ і з'ясуйте їх характер.

102. Сформулюйте і доведіть теорему про обмеженість функції неперервної на замкненому проміжку. Які її узагальнення Ви знаєте ?.

103. Якщо функція f є неперервною на відкритому проміжку $(a;b)$, то вона приймає на $(a;b)$ найбільше значення. Чи є справедливим це твердження?

104. Функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на проміжку $(0;1)$. Доведіть це твердження.

105. Сформулюйте означення похідної в точці функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

106. Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x)=\begin{cases} 2x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0. \end{cases}$

107. Доведіть, що $f'(-x)=-f'(x)$, якщо $f(-x)=f(x)$ і функція f є диференційованою на $\mathbb{R}$.

108. Завершіть написання рівності $(u+v)'=$ і обґрунтуйте її.

109. Завершіть написання рівності $(x^{\mu})'=$ і обґрунтуйте її.

110. Завершіть написання формули $(e^x)'=$ і доведіть її.

111. Завершіть написання рівності $(\operatorname{arctg} x)'=$ і обґрунтуйте її.

112. Завершіть написання рівності $(\arcsin x)'=$ і обґрунтуйте її.

113. $f'^2 + f'^3 = f$, якщо функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задана параметрично системою $\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3. \end{cases}$ Доведіть це твердження.

114. Для функції $y'(x) + y(x) = 0$. Напишіть відповідне висловлення для функції $u(t) = y(e^t)$.

115. Опишіть взаємозв'язок між існуванням похідної і диференційовністю функції.

116. Знайдіть $d^2 f(x_0)$, якщо $f(x) = xe^x$, $x_0 = 1$, $dx = 0{,}1$.

117. Сформулюйте і доведіть теорему Лагранжа.

118. Запишіть формулу Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа в точці $a = 0$ для функції $f(x) = e^x$ і обґрунтуйте її.

119. Подайте функцію $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ у вигляді $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + r_m(x)$, якщо $a = 2$, $m = 3$.

120. Доведіть, що для всіх $x \in [-1;1]$ абсолютна похибка Δ наближеної формули $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ не перевищує $0{,}1$.

121. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

122. $x + x^2 = o\left(x^3\right)$, $x \to \infty$. Чи справедливим є це твердження?

123. $x + \dfrac{1}{x} = o\left(x^3\right)$, $x \to 0$. Чи справедливим є це твердження?

124. $x + \dfrac{1}{x} = O\left(x^3\right)$, $x \to \infty$. Чи справедливим є це твердження?

125. $e^{\sqrt{x}} \sim e^{\sqrt{x+1}}$, $x \to +\infty$. Чи справедливим є це твердження?

126. $\dfrac{2+e^x}{1+e^x} = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Чи справедливим є це твердження?

127. $\dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x} = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Чи справедливим є це твердження?

128. $x^3 = o\left(e^x\right)$, $x \to +\infty$. Чи справедливим є це твердження?

129. З'ясуйте, чи $f(2x) \sim f(x)$, якщо $x \to +\infty$ і $f(x) = \ln x$.

130. З'ясуйте, чи $f(x) = o(f(2x))$, якщо $x \to +\infty$ і $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

131. Знайдіть такі числа c_0 і c_1, що $e^{x\sin x} = c_0 + c_1 x + o(x)$, $x \to 0$.

132. Доведіть, що $(\forall c_1 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta): f(x) \ge c_1 \varphi(x)$, якщо $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = x^2$.

133. Сформулюйте означення точки мінімуму функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

134. Сформулюйте і обґрунтуйте необхідні умови екстремуму функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

135. Чи правильне твердження: якщо функція f – зростаюча на відкритому проміжку $(a;b)$, то $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$?

136. Знайдіть проміжки, звуження на які функції $f(x) = x^3 - 4x$ є оборотною функцією.

137. Знайдіть проміжки монотонності функції $f(x) = 2 - 3x + x^3$.

138. Знайдіть екстремуми функцій $f(x) = 6x - x^3$.

139. Доведіть нерівність $e^x \ge 1 + x$, якщо $x \ge 0$.

140. Доведіть нерівність $\sin x \ge \dfrac{2}{\pi} x$, якщо $0 \le x \le \pi/2$.

141. Доведіть нерівність $(1+t)^\alpha \le 1 + t^\alpha$, $\alpha \in [0;1]$, $t \ge 0$.

142. Доведіть нерівність $\operatorname{arctg} x \le \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{1+x}$, $x > 0$.

143. Знайдіть проміжки опуклості і точки перегину функції $f(x)=e^{-x}+x^2$.

144. Знайдіть асимптоти функції $f(x)=\dfrac{x^4}{4(x-2)}$.

145. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-2}$, . на проміжку $[-1;1]$.

146. Зобразіть схематично графік функції f, якщо $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, для всіх $x\in\mathbb{R}$.

147. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y(x)=3x^4+4x^3+1$ на відрізку $[-2;1]$.

148. Знайдіть екстремуми функції $y(x)=3x^2-4x^3$.

149. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y(x)=-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$ на проміжку $[-1;1]$.

150. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку $y(x)=x^4-2x^2+3$ на проміжку $[1;3]$.

151. Знайдіть найбільше значення функції $y(x)=2x^3-15x^2+36x$ на проміжку $[0;2]$.

152. Скільки точок екстремуму має функція $y(x)=(x^2-4)^3$?

153. Скільки точок екстремуму має функція $y(x)=(x^3+x)^3$?

154. Скільки точок екстремуму має функція $y(x)=3x^4-4x^3+5$?

155. Знайдіть абсцису точки параболи $y=-x^2+8x-3$, у якій кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює -6.

156. Знайдіть ординату точки параболи $y=x^2+4x-7$, у якій кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює 6.

157. Рівняння дотичної до кривої $y=2x^2-4x-1$ має вигляд $y=8x-19$. Знайдіть абсцису точки дотику.

158. Рівняння дотичної до кривої $y=-x^2+5x+4$ має вигляд $y=3x+5$. Знайдіть ординату точки дотику.

159. Скільки критичних точок має функція $y=\sqrt[3]{x^2-1}$?

160. Знайдіть найменшу критичну точку функції $y=\sqrt[3]{x^2+9x-10}$.

161. Знайдіть найбільше значення $f(x)=2^{-x^2}$ на відрізку $[0;2]$.

162. Знайдіть найбільше значення функції $y=|x^2-3x|$ на проміжку $[0;3]$.

163. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=\dfrac{(3x-5)(-25-x)}{(x+5)^2}$.

164. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x)=\dfrac{(3x-11)(-7-x)}{(x-1)^2}$.

165. Знайдіть найменше ціле значення a, при якому функція $y=x^3+ax^2+x+1$ зростає на всій числовій осі.

166. Знайдіть найменше ціле значення a, при якому функція $y=e^{ax}+ax$ зростає на всій числовій осі.

167. Знайдіть суму параметрів a і b, при яких параболи $y=x^2-4x-a$ і $y=-x^2+2x+b$ мають спільну дотичну, паралельну осі абсцис.

168. Знайдіть абсцису точки перетину осі OX з дотичною до графіка функції $y=0{,}5x^2+1$, якщо дотична проходить через точку $M(-1;-3)$ і має додатний кутовий коефіцієнт.

169. При якому значенні параметра $a>0$ параболи $y=-2x^2-8ax+1$ і $y=3x^2-12x+15$ мають спільну дотичну, паралельну осі абсцис?

170. При якому значенні параметра а пряма $y=a(x-2)+11$ є дотичною до параболи $y=2x^2+2x-1$?

171. При якому значенні параметра а пряма $y=a(x-1)-2$ є дотичною до кривої $y^2=5x-1$?

172. Закон руху точки по прямій задається формулою $x(t)=2t-1$ Знайдіть миттєву швидкість руху точки при $t=\frac{1}{2}$.

173. $\sup\{f(x): x\in(0;+\infty)\}=1$ і $\inf\{f(x): x\in(0;+\infty)\}=0$, якщо $f(x)=\frac{x}{1+x}$. Доведіть це твердження.

174. Доведіть, що функція $f(x)=3^x+4^x$ є розв'язком рівняння $f(x+2)-7f(x+1)+12f(x)=0$.

175. З'ясуйте, чи функція $f(x)=\sin\left(a+\frac{2\pi\lg x}{\lg a}\right)$ є розв'язком рівняння $f(ax)-f(x)=0$, $a\in\mathbb{R}$.

176. Зобразіть графік функції $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}$.

177. Зобразіть графік функції $y=10^{\lg|x|}$.

178. Знайдіть $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, якщо $f(x)=\begin{cases}2x, x\in(-\infty;1),\\ 3, x=1,\\ 2x, x\in(1;+\infty).\end{cases}$

179. Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x)=\begin{cases}2x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq0,\\ 0, x=0.\end{cases}$

180. Знайдіть екстремуми функції $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$.

181. Знайдіть $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$.

182. Знайдіть всі розв'язки рівняння $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=6y-y^2-7$.

183. Знайдіть область визначення функції $f(x)=\arccos\sqrt{3-2x-x^2}$.

184. Знайдіть множини, на яких справедлива рівність $\arcsin x=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

185. Знайдіть обернену функцію функції $y=\frac{4-x}{4+x}$.

186. Знайдіть періоди функції $y=\sin 2x+2\sin 3x$.

187. Зясуйте, чи функція $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ є обмеженою в деякому проколеному околі точки $a=0$.

188. Побудуйте графік функції $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}nx$.

189. Якщо функція не має ні найбільшого, ні найменшого значень, то вона необмежена Чи правильне твердження: ?

190. Якщо функція обмежена, то вона набуває в деяких точках області визначення найбільшого і найменшого значень. Чи правильне твердження?

191. Наведіть приклад функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка має похилі асимптоти при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$, але не має похилої асимптоти при $x\to\infty$.

192. Наведіть приклад функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка є опуклою на кожному з проміжків $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$, але не є опуклою на $(-\infty;+\infty)$.

193. Не існує диференційовної на $(-\infty;+\infty)$ функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка не є неперервною в точках $x_1=-1$ і $x_2=1$. Обґрунтуйте це твердження.

194. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\sin x$ у точці $(x_0;y_0)$, для якої $x_0=\pi/3$.

195. Рівняння $x^5+x^4+x^2+10x-5=0$ має єдиний додатний корінь і цей корінь належить проміжку $(0;1/2)$. Обґрунтуйте це твердження.

196. Існує диференційовна на проміжку $[a;b]$ функція $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, яка в точці $c\in[a;b]$ приймає найбільше на $[a;b]$ значення і $f'(c)\neq 0$. Обґрунтуйте це твердження.

197. Рівняння $xe^x=2$ має єдиний дійсний корінь і цей корінь належить проміжку $(0;1)$. Обґрунтуйте це твердження.

198. Якщо $f(x)=e^x\operatorname{sh}x$, то $f''(x)+2f'(x)+2f(x)=0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Чи є справедливим це твердження?

199. Знайдіть таку точку $x_0\in\mathbb{R}$, що дотичні до графіків функцій $f_1(x)=x^2$ і $f_2(x)=x^3$ в точках $(x_0;f_1(x_0))$ і $(x_0;f_2(x_0))$, відповідно, є паралельними.

200. Знайдіть таку точку $x_0\in\mathbb{R}$, що дотична до графіка функції $f(x)=x^2$ утворює з прямою $3x-y+1=0$ кут $\pi/4$.

201. $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi-\operatorname{arctg}x$, якщо $x\in[1;+\infty)$. Чи є справедливим це твердження?

202. Дослідіть функцію $y(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-16}$ і побудуйте її графік .

203. Сформулюйте означення первісної і невизначеного інтеграла.

204. Знайдіть $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

205. Знайдіть $\int\dfrac{x}{1+x^2}dx$.

206. Знайдіть $\int\dfrac{dx}{x^2+3x+3}$.

207. Знайдіть $\int\dfrac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

208. Знайдіть $\int\dfrac{dx}{x^2+4x+3}$.

209. Знайдіть $\int\dfrac{x^2}{x^2+1}dx$.

210. Знайдіть $\int x\sin x\,dx$.

211. Знайдіть $\int x\ln x\,dx$.

212. Знайдіть $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

213. Знайдіть $\int xe^{\sqrt{x}}dx$.

214. Знайдіть $\int\cos^2 x\,dx$.

215. Знайдіть $\int\sin^3 x\,dx$.

216. Знайдіть $\int\operatorname{ctg}^2 2x\,dx$.

217. $\int xf'(x)dx=xf(x)-F(x)+C$, якщо функція f має похідну і первісну F на проміжку Δ, що розглядається.

218. Виходячи з означення первісної і невизначеного інтегралу, покажіть, що $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $x \in (-a; a)$, $a > 0$.

219. Сформулюйте означення визначеного інтеграла (інтеграла Рімана).

220. Якщо функція $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$, то вона є обмеженою на $[a;b]$. Доведіть це твердження.

221. Якщо $a \le b$, функція $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$ і $f(x) \ge 0$ для всіх $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Доведіть це твердження.

222. Якщо функція $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ є неперервною на $[a;b]$, то $\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$ для всі $x \in [a;b]$. Доведіть це твердження.

223. Якщо функція $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ є непарною і неперервною на проміжку $[-a;a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Доведіть це твердження.

224. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ для кожної функції $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0;1]$.

225. Якщо функція $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[0;1]$, то $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)$. Доведіть це твердження.

226. Знайдіть границю $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$

227. Знайдіть границю $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k$.

228. Знайдіть $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

229. Знайдіть $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$.

230. Знайдіть $\int_0^3 x\sqrt{9 - x^2} dx$.

231. Знайдіть $\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x-1} dx$.

232. Знайдіть $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

233. Знайдіть $\int_{-1}^{2} \sqrt[3]{|x-1|} dx$.

234. Знайдіть $\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x} dx$.

235. Матеріальна точка рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = 2t^2 - 4$ (ì /ñ).Знайдіть шлях пройдений матеріальною точкою за інтервал часу (інтервал задано в секундах) $[1;4]$.

236. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int\limits_0^x \frac{t^2\ln t}{1+t}dt}{x^3\ln x}$.

237. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int\limits_0^x \sqrt[3]{1+t^3}\,dt}{x^2}$.

238.

239. Функція Діріхле $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ не є інтегрованою на проміжку $[0;1]$, але функція $|f|$ є інтегрованою на $[0;1]$. Доведіть це твердження.

240. $\int\limits_1^n \frac{1}{t}dt-\frac{1}{n}\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le 1+\int\limits_1^n\frac{1}{t}dt$. Доведіть це твердження.

241. Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha>1$ і є розбіжним, якщо $\alpha\le 1$. Доведіть це твердження.

242. Знайдіть $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

243. Знайдіть $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx$.

244. Якщо E – область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то її площа знаходиться за формулою $P=\pi ab$. Доведіть це твердження.

245. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=x^3$ і $y=x$, то його об'єм $V=\frac{4\pi}{21}$. Доведіть це твердження.

246. Об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ знаходиться за формулою $V=\frac{4\pi abc}{3}$. Доведіть це твердження.

247. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими $y=-x^2-x+2$ і $y=x+2$.

248. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими $y=x^2$ і $y=2-x$, $xy=6$, $y=-x+7$.

249. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими $xy=6$ і $y=-x+7$.

250. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими $y=x^2-4x+4$ і $y=x$.

251. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими $y=\left|-x^2-4x\right|$ і $y=0$.

252. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими $y=\arccos|x|$ і $y=1/2$.

253. Сформулюйте означення спрямованої кривої і її довжини.

254. Знайдіть довжину кривої $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t), & t\in[0;\pi].\end{cases}$.

255. Знайдіть об'єм тіл, утворених при обертанні навколо осі OX плоскої фігури, обмеженої кривими $y=-x^2+5x+6$ і $y=0$.

256. Знайдіть довжину частини логарифмічної спіралі $\rho=e^\varphi$, $\varphi\in[0;\pi]$.

257. Знайдіть площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі OX вказаної кривої $y=x\sqrt{x}$, $x\in[0;1]$.

258. Сформулюйте означення збіжності ряду.

259. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ є збіжним, то його загальний член прямує до нуля, тобто $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Доведіть це твердження.

260. $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}$, якщо $|q|<1$. Доведіть це твердження.

261. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Доведіть це твердження.

262. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$ і є розбіжним, якщо $\alpha \le 1$. Доведіть це твердження.

263. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3+k+2}{k^5+k^2+1}$.

264. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$.

265. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\frac{1}{\sqrt{k}}$.

266. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+5^k}$.

267. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{arctg} k}{k}$.

268. Дослідіть на збіжність ряд. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{2^{k+1}k}$.

269. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2k^2)^{-k^2} 5^k$.

270. Дослідіть на рівномірну збіжність функціональну послідовність $f_k(x) = \operatorname{arctg} kx$ на проміжку $(0;+\infty)$.

271. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kxe^{-k^5x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $[0;+\infty)$. Доведіть це твердження.

272. Знайдіть множину точок збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$.

273. Якщо всі функції $f_k(x)$ є неперервними на замкненому проміжку $[a;b]$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ї рівномірно збіжним на $[a;b]$, то $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$. Доведіть це твердження.

274. $\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Доведіть це твердження.

275. $\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{k^2+x^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$. Доведіть це твердження.

276. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$. Доведіть це твердження.

277. $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$. Доведіть це твердження.

278. Знайліть розвинення функції $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ в ряд Тейлора в околі точки $a = 0$.

279. Напишіть перші три ненульові члени розвинення функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ в ряд Тейлора в околі точки $a = 0$.

280. Якщо функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ є T-періодичною і диференційованою на $\mathbb{R}$, то функція f' також є T-періодичною. Доведіть це твердження.

281. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=\begin{cases}\pi, & n=m\neq 0,\\ 2\pi, & n=m=0,\\ 0, & n\neq m,\end{cases}$ Доведіть це твердження.

282. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)=\dfrac{1-a\cos\varphi+ia\sin\varphi}{|1-q|^2}$, якщо $a\in(0;1)$, $\varphi\in\mathbb{R}$ і $q=ae^{i\varphi}$. Доведіть це твердження.

283. Напишіть ряд Фур'є функції $f(x)=x$ на проміжку $[-\pi;\pi]$ і з'ясуйте в яких точках $x\in\mathbb{R}$ його сума $S(x)$ дорівнює $f(x)$.

284. Знайдіть $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{k};\dfrac{k}{k+1};\dfrac{k}{k^2+1}\right)$.

285. Знайдіть границю $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$.

286. Знайдіть граничні точки множини $E=\left\{\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{m}\right):n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{R}^2$.

287. Вкажіть множину $E\subset\mathbb{R}^2$, яке має тільки дві граничні точки $A=(-1;0)$ і $B=(-1;0)$.

288. Знайдіть множину визначення функції $f(x;y)=\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(y+1)}}$.

289. Знайдіть поверхні рівня функції $f(x,y,z)=x+y+z$.

290. Наведіть приклад зв'язної множини в просторі $\mathbb{R}^2$.

291. Вкажіть множину $E\subset\mathbb{R}^2$, яке має тільки дві граничні точки $A=(-1;0)$ і $B=(-1;0)$.

292. Наведіть приклад двозв'язної області в $\mathbb{R}^2$.

293. Знайдіть діаметр множини $E=\{(x;y):|x|+|y|<1\}\subset\mathbb{R}^2$

294. Наведіть нескінченної множини $E\subset\mathbb{R}^2$, яка є ніде нещільною в просторі $\mathbb{R}^2$.

295. Наведіть приклад компакта в просторі $\mathbb{R}^2$.

296. Зобразіть область визначення функції $f(x;y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2/4}}$.

297. З'ясуйте, чи існує границя $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

298. З'ясуйте, чи існує границя $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

299. Сформулюйте означення диференціала функції $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

300. Знайдіть $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1;1)$, якщо $f(x;y)=-yx^3+x^2y^2$.

301. Знайдіть похідну функції $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$ в точці $A(2;3)$ в напрямі вектора $\overline{AO}$.

302. Доведіть, що $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$, якщо $u=\dfrac{x-y}{z-t}+\dfrac{t-x}{y-z}$.

303. Знайдіть диференціали першого і другого порядку функції $u=x^2y^3$.

304. Знайдіть $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, якщо $u=\varphi(\xi;\eta)$, $\xi=x^2+y^2$ і $\eta=xy$.

305. Знайдіть $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, якщо $x+y+z=e^z$.

306. Запишіть рівняння дотичної площини до поверхні $z=yx$ в точці $(1,1,1)$.

307. Запишіть формулу для знаходження першого диференціала функції $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

308. Сформулюйте означення точки мінімуму функції $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

309. Подайте $f(x;y)=e^{x+y}$ у вигляді $f(x;y)=c_0+c_1(x-a_1)+c_2(y-a_2)+c_3(x-a_1)^2+c_4(x-a_1)(y-a_2)++c_5(y-a_2)^2+\varepsilon\rho^2$, де $a=(a_1;a_2)=(0;0)$, $c_0,\ldots,c_5$, – сталі і $\varepsilon \to 0$, коли $\rho=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2} \to 0$.

310. Знайдіть частинні похідні першого порядку функції $f(x;y)=xy\,\mathrm{tg}\,xy$.

311. З'ясуйте, чи функція $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ є розв'язком рівняння, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

312. З'ясуйте, чи функція $u=e^x\cos y$ є розв'язком рівняння, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

313. З'ясуйте, чи функція $u=\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ є розв'язком рівняння, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

314. Напишіть рівняння дотичної площини і нормалі до графіка функції $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ в заданій точці $(1;0;1)$.

315. Знайдіть градієнт функції $f(x;y)=x^2y+y^2x$.

316. Знайдіть градієнт функції $f(x;y)=x^y+y^x$.

317. Знайдіть градієнт функції $f(x;y;z)=xy^2+zx^2+yz^2$.

318. Знайдіть екстремуми функції $f(x;y)=e^x+e^{-y}-x+y$.

319. Знайдіть кут між градієнтами фуннкції $f(x;y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ точках $(1;1)$ і $(2;3)$.

320. Зясуйте, чи функція $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ є розв'язком рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, де a і b -сталі.

321. Знайдіть екстремуми функції $f(x;y)=y^3-x^2-27y+3x+16$.

322. Дослідить на екстремум функцію $u=x^2-2xy+4y^2+6z^2+6yz-6z$.

323. Знайдіть екстремуми функції $u=x^2+y^2+z^2+4x-8y-2z+6$.

324. Знайдіть умовні екстремуми функції $f(x;y;z)=x+y-z+6$, $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}=1$.

325. Знайдіть умовні екстремуми функції $u=2x^2+3y^2-z^2$, $x+y+z=1$.

326.

327. Знайдіть найбільшк значення функції $f(x;y)=xy-x^2y-\frac{xy^2}{2}$ в області $D=\{(x;y):0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

328. Знайдіть найменше значення функції $f(x;y)=x^3+3y^2-x+18y-4$ в області $D=\{(x;y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

329. Знайдіть найбільшк значення функції $f(x;y)=x^2-4xy-5y^2$ в області $D=\{(x;y):|x|+|y|\le 1\}$.

330. Знайдіть найбільшк значення функції $f(x;y)=x^2-4xy-5y^2$ в області $D=\{(x;y):|x|+|y|\le 2\}$.

331. Знайдіть умовні екстремуми функції $f(x;y)=xy$, $x+y=1$.

332. Знайдіть точки умовного екстремуму $u=2x+y-z+1$, $x^2+2y^2+2z^2=22$.

333. Знайдіть інтеграл $\iint\limits_D \frac{1}{(x-y)^2}dxdy$, $D=\{(x,y):3\le x\le 4,\quad 1\le y\le 2\}$.

334. Знайдіть множину визначення функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, якщо $f(x)=\left(\arcsin\sqrt{x+1};\sqrt{x+1};\ln(1+x)\right)$.

335. Знайдіть множину визначення функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, якщо $f(x)=\left(\arccos\frac{x-1}{x+1};4-x^2;\frac{x+3}{x}\right)$.

336. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2};x\sin\frac{1}{x}\right)$ функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

337. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2};(1-2x)^{\frac{1}{x}+1}\right)$ функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.

338. Сформулюйте означення подвійного інтеграла.

339. Змініть порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x;y)dy$.

340. Змініть порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x;y)dy$.

341. Знайдіть $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, якщо $D=\{(x;y):\ 3\le x\le 4,\ 1\le y\le 2\}$.

342. Знайдіть $\iint\limits_E xe^{(x+y)}dxdy$, якщо $E=\{(x;y):0\le x\le 1,-1\le y\le 0\}$.

343. Знайдіть $\iint\limits_E xydxdy$, якщо $E=\{(x;y):2x\le x^2+y^2\le 6x\}$.

344. В інтегралі $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ перейдіть до полярної системи координат і розставте в ній межі інтегрування, якщо $D=\{(x;y):\ y-x\le 3,x\le 0,\ \ y\ge 0\}$.

345. В інтегралі $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ перейдіть до полярної системи координат і розставте в ній межі інтегрування, якщо $D=\{(x;y):\ x^2+x^2\le 1,0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\}$.

346. За допомогою подвійного інтеграла знайдіть площу області $D=\{(x;y):0\le y\le x,x+y\le 2\}$.

347. За допомогою подвійного інтеграла знайдіть площу області $D=\{(x;y):x+y\ge 3,x^2+y^2\le 9\}$.

348. За допомогою подвійного інтеграла знайдіть об'єм тіла, яке обмежене поверхнями $z=xy$, $z=0$ і $x+y=1$.

349. Знайдіть площу частини поверхні $x+y+z=6$, яка розміщена в першому октанті.

350. Знайдіть потрійний інтеграл $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-x}^{x} dy\int\limits_{x}^{xy} ydz$.

351. Знайдіть потрійний інтеграл $\iiint\limits_T dxdydz$, $T=\{(x;y;z):x+y+z\le 1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$.

352. Знайдіть потрійний інтеграл $\iiint\limits_T xdxdydz$, $T=\{(x;y;z):x^2+y^2\le 1,0\le z\le 4\}$.

353. За допомогою потрійного інтеграла знайдіть об'єм тіла T, яке обмежене вказаними поверхнями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ і $z=0$.

354. Сформулюйте означення криволінійного інтеграла першого роду.

355. Знайдіть криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_\gamma \frac{dl}{x-y}$, де γ – відрізок $y=\frac{1}{2}x-2$, $x\in[0;4]$.

356. Знайдіть криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{\gamma} xy^3 dl$, де γ –частина кола

$$\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = 2\cos t, t \in [0; \pi/2], \end{cases}$$

357. Знайдіть криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$, де γ :

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

358. Знайдіть криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{\gamma} (x - y) dl$, γ –відрізок прямої $y = x + 3$, де від точки $(0;3)$ до точки $(2;5)$.

359. Сформулюйте означення криволінійного інтеграла другого роду.

360. Знайдіть криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{\gamma} xydx + x^2 ydy$, де γ – частина параболи $y = x^2$, $x \in [0;1]$.

361. Знайдіть криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{\gamma} 2xydx - x^2 dy$, де γ –відрізок, який з'єднує точки $(0;0)$ і $(1;2)$. Початок кривої в точці $(0;0)$.

362. Переконайтесь, що криволінійний інтеграл $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$ не залежить від шляху інтегрування в області D і знайдіть його.

363. За допомогою формули Гріна знайдіть криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{\gamma} xy^2 dy - x^2 ydx$, де γ – коло $x^2 + y^2 = 1$, орієнтовне додатним чином.

364. З'ясуйте, чи права частина формули $du = x^2 dx + y^2 dy$ є диференціалом деякої функції функцію $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ і знайдіть її.

365. Сформулюйте означення поверхневого інтеграла першого роду.

366. Знайдіть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\Omega} zds$, де Ω – півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

367. Знайдіть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\Omega} zdxdy$, де Ω – зовнішня сторона сфери $\{(x;y;z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

368. Знайдіть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\Omega} zds$, де $\Omega = \{(x;y;z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

369. Знайдіть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) ds$, де $\Omega = \{(x;y;z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 4\}$.

370. Знайдіть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\Omega} xdxdz + ydzdy + ydxdy$, де Ω – зовнішня сторона сфери $\{(x;y;z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16\}$.

371. Множина $E = [0;1] \cap \mathbb{Q}$, тобто множина всіх раціональних чисел із проміжку $[0;1]$, є невимірною множиною за Жорданом.. Доведіть це твердження.

372. Знайдіть міру Лебега множини $A = \mathbb{N} \cup [-1;3)$.

373. Наведіть приклад компакта в просторі $\mathbb{R}^2$.
374. Наведіть приклад зліченної скрізь щільної множини в просторі в просторі $\mathbb{R}$.
375. Знайдіть повну варіацію функції $f(x)=x^2$ на проміжку $[0;3]$.
376. Сформулюйте означення відстані.
377. Сформулюйте означення повного метричного простору.
378. Наведіть приклад неповного метричного простору.
379. Сформулюйте означення норми.
380. Сформулюйте означення скалярного добутку.
381. Наведіть приклад банахового простору, який не є гільбертовим.
382. Сформулюйте і доведіть теорему С. Банаха про стискуючі відображення.
383. Поясніть суть методу послідовних наближень.
384. Методом послідовних наближень знайдіть розв'язок рівняння $1+\cos x=10x$.
385. Знайдіть скалярний добуток елементів $x(t)=e^t$ **і** $y(t)=e^{int}, n\ge 2$, простору $L_2(-\pi;\pi)$.
386. Знайдіть норму елемента $z=(1-i;1)$ простору $\mathbb{C}^2$.
387. Знайдіть відстань між функціями $f_1(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$ і $f_2(x)=4x$ в просторі $C[1;3]$.
388. Методом послідовних наближень знайдіть друге наближення в просторі $C[0;1]$ розв'язку рівняння $u(x)+\int_0^1 (t+x^2)u(t)dt=1$, взявши $u_0(t)=0$.
389. Знайдіть норму функціонала f, заданого на просторі $H=L_2(0;1)$ рівністю $f(x)=\int_0^1 tx(t)dt$.
390. Знайдіть міру Лебега множини $A=\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(k-1/k;k+1/k)\right)\cap[-10;2]$.
391. Знайдіть відстань між кривими $y=x^2$ і $x-y-8=0$.
392. Знайдіть відстань між точкою $A(2;3)$ і кривою $y=2\sqrt{x}$.
393. Знайдіть скалярний добуток елементів $x=\frac{1}{t+1}$, **і** $y=\frac{1}{t+2}$ простору $L_2(-\pi;\pi)$.
394. Знайдіть норму елемента $x=t\cos t$ простору $H=L_1(0;\pi/2)$.
395. Знайдіть відстань між функціями $x=t$ і $y=t\sqrt{1-t}+t$ в просторі $H=L_1(0;1)$.
396. Методом послідовних наближень знайдіть друге наближення в просторі $C[0;1]$ розв'язку рівняння $\int_0^1 \frac{xt}{1+u^2(t)}dt=u(x)$, взявши $u_0(t)=0$.
397. Знайдіть норму функціонала f, заданого на просторі $H=L_2(0;+\infty)$ рівністю $f(x)=\int_0^{+\infty} x(t)\sqrt{t}e^{-t}dt$.
398. Знайдіть міру Лебега множини $A=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left(k-e^{-k};k+e^{-k}\right)$.
399. Знайдіть скалярний добуток елементів $x=1$ **і** $y=e^{-t}$ простору $H=L_2(0;1)$.
400. Знайдіть норму елемента $x=\frac{t}{1+t^2}$ простору $H=L_\infty(0;1)$.
401. Знайдіть відстань між функціями $y=t+t\sqrt{t^2+1}$ і $x=t$ в просторі $H=L_2(-1;1)$.
402. Методом послідовних наближень знайдіть друге наближення в просторі $C[0;1]$ розв'язку рівняння $u(x)-\int_0^1 (t-x^2)u(t)dt=x$, взявши $u_0(t)=0$.
403. Знайдіть норму функціонала f, заданого на просторі $H=l_2$ рівністю $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e^{-k}$, $x=(x_1;x_2;...)$.
404. Знайдіть скалярний добуток елементів $x=t$ **і** $y=e^{-t^2}$ простору $H=L_2[0;+\infty)$.

405. Знайдіть норму елемента $x=(2^{-k})$ простору $H=l_\infty$.

406. Знайдіть відстань між функціями $x=t$ і $y=t^2+2$ в просторі $H=L_\infty(-1;1)$.

407. Методом послідовних наближень знайдіть друге наближення в просторі $C[0;1]$ розв'язку рівняння $u(x)-\int_0^1 (x^2-t)u(t)dt=x$, взявши $u_0(t)=0$.

408. Знайдіть норму функціонала f, заданого на просторі $H=l_1$ рівністю $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx_k}{k+1}$, $x=(x_1;x_2;...)$.

409. Знайдіть модуль і головне значення аргументу комплексного числа $z=i^{1003}+3$.

410. Знайдіть модуль і головне значення аргументу комплексного числа $z=\frac{(1+i)^5}{(1-i)^4}$

411. Знайдіть $\sqrt[3]{i}$.

412. Знайдіть $\mathrm{Ln}(3-3i)$.

413. Розв'яжіть рівняння $\cos z=2$.

414. $|\sin z|=\sqrt{\mathrm{ch}^2 y-\cos^2 x}$, якщо $z=x+iy$. Чи є справедливим це твердження?

415. Знайдіть помилку в міркуваннях: "Очевидно, що $i^{21}=\left(i^4\right)^{\frac{21}{4}}=1^{\frac{21}{4}}=1$. Водночас $i^{21}=\left(i^4\right)^5 i=i$.Отже, $i=1$".

416. Знайдіть помилку в міркуваннях: "Очевидно, що $\mathrm{Ln}\,i^2=\mathrm{Ln}\,1$. Водночас, $\mathrm{Ln}\,i^2=\mathrm{Ln}(i\bullet i)=\mathrm{Ln}\,i+\mathrm{Ln}\,i=2\,\mathrm{Ln}\,i$.Отже, $\mathrm{Ln}\,1=2\,\mathrm{Ln}\,i$".

417. Дослідіть на збіжність ряди: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+i}{k^3+i}$.

418. Розв'яжіть рівняння $z=|z|$.

419. Розв'яжіть рівняння: $\overline{z}=z^2$.

420. Зобразіть множину $D=\{z:|z+1|>3\}\subset\mathbb{C}$.

421. Зобразіть множину $\{z:\mathrm{Im}\,z>2\}$.

422. Знайдіть $w(D)$, якщо $D=\left\{z:\arg z=\frac{\pi}{3}\right\}$ і $w=1/z$.

423. Знайдіть $f(D)$, якщо $D=\{z:\mathrm{Re}\,z>0\}$ і $f(z)=(1-i)z+i$.

424. Побудуйте конформне відображення області $D=\left\{z:|\arg z|<\frac{\pi}{4}\right\}$ на область $G=\{w:\mathrm{Re}\,w<0\}$.

425. Знайдіть розвинення в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функції $f(z)=e^{3z}$.

426. Знайдіть розвинення в ряд Лорана в кільці $D=\{z:1<|z|<2\}$ функції $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$.

427. Знайдіть всі нулі функції f в $\mathbb{C}$ і їх порядки $f(z)=(z^2+2z+1)(e^z-1)$.

428. Знайдіть всі особливі точки функції $f(z)=ze^{1/z}$ та з'ясуйте їх характер.

429. Знайдіть лишки функції $f(z)=\frac{1}{z^2+2iz-1}$ в її скінченних особливих точках.

430. Знайдіть $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{dz}{z(z^2-4)}$, якщо $D=\{z:|z|<1\}$.

431. Знайдіть інтеграли $\int_{\partial D}\frac{z^3dz}{z^4-1}$, $D=\{z:|z|<2\}$.

432. З'ясуйте, чи функція $y=e^{x^2}$ є розв'язком рівняння $y'+y=(2x+1)y$,

433. Зясуйте, чи функція $f(x) = x\sin x$ є розв'язком рівняння $\frac{y'}{\cos x} - x = \operatorname{tg} x$.

434. З'ясуйте, чи функція $y = x + \sqrt{1+x^2}$ є розв'язком рівняння $y' + y = (2x+1)y$,

435. Розв'яжіть задачу Коші $y' = e^{2x}$, $y(1) = 2$.

436. Розв'яжіть задачу Коші $y' - \frac{y}{x} = 0$, $y(2) = 1$.

437. Розв'яжіть задачу Коші $y' - \frac{xy}{1-x^2} = 0$, $y(1) = 2$.

438. Розвяжіть задачу Коші $y'(x)\operatorname{tg} x = y(x) + 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

439. Розв'яжіть задачу Коші $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$.

440.

441. Розв'яжіть задачу Коші $y' - y = \cos x$, $y(0) = 1$.

442. Розв'яжіть задачу Коші $y' + y = \sin x$, $y(0) = 1$.

443. Розв'яжіть задачу Коші $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

444. Розв'яжіть задачу Коші $y'' + 4y = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1, y'(\frac{\pi}{2}) = -1$.

445. Розв'яжіть задачу Коші $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

446. Розв'яжіть задачу Коші $y'' + 16y = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = -1, y'(\frac{\pi}{4}) = 1$.

447. Розв'яжіть задачу Коші $y'' + y = 1$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

448. Розв'яжіть задачу Коші $y'' + y = x + 1$, $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

449. Розв'яжіть задачу Коші $y'' + y = e^x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

450. Розв'яжіть задачу Коші $y'' - y' = xe^x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

451. Знайдіть геометричне місце стаціонарних точок для інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = x - 4y^2 + 6$.

452. Розв'яжіть рівняння $u(x) = \int_0^x u(t)dt$.

453. Розв'яжіть рівняння $y(x) = \int_0^x e^{y(t)}dt$.

454. Розв'яжіть рівняння $y(x) = \int_0^x y(t)dt$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

455. Розв'яжіть задачу Коші $y''(x) = x\ln x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

456. Знайдіть криву, яка проходить через точку $(1;2)$ і для якої відрізок дотичної, розміщений між координатними осями, у точці дотику ділиться навпіл.

457. В ящику міститься a білих і b чорних куль. Навгад виймають дві кульки. Знайдіть ймовірність $P(A)$ того, що обидві кульки будуть білими (подія A).

458. В партії з N виробів M бракованих. З партія навгад вибирають n виробів. Знайдіть ймовірність $P(A)$ того, що серед них буде m бракованих (подія A).

459. В лотереї 1000 білетів; з них на один білет випадає виграш 500 грн., на 10 білетів–виграш 100 грн., на 50 білетів–виграш 20 грн., на 100 білетів–виграш 5 грн., решта білетів невиграшні. Дехто купує один білет. Знайдіть ймовірність $P(A)$ того, що він виграв не менше 20 грн. (подія A).

460. Монету кидають шість разів. Знайдіть ймовірність $P(A)$ того, що випаде більше гербів(подія A).

461. Є три однакові ящики; в першому ящику дві білі і одна чорна кулька; в другому – три білі і одна чорна кулька; в третьому–дві білі і дві чорні кульки. Дехто з одного з ящиків навгад вибирає одну кульку. Знайдіть ймовірність $P(A)$ того, що ця кулька буде білою(подія A).

1.4. Зразки задач

1.Полотняне шатро з об'ємом V має форму прямого кругового конуса. Яким повинно бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоб на шатро пішло найменше тканини?

2. В рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при основі вписати паралелограм найбільшої площі так, щоб одна із його сторін лежала на основі, а друга на бічній стороні трикутника. Знайти сторони паралелограма.

3. Знайти співвідношення між радіусом R і висотою H циліндра, який при заданому об'ємі V має найбільшу повну поверхню.

4. Покажіть, що серед усіх рівнобедрених трикутників, вписаних в дане коло, найбільший периметр має рівносторонній трикутник.

5. Переріз тунеля має форму прямокутника завершеного півкругом. Периметр перерізу 18м . При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою? 6. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R.

7. Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в півкруг радіуса a .

8. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в еліпс $x^2/25+y^2/9=1$. 9. Знайти найбільший об'єм конуса, який має дану твірну l .

10. Знайти найбільший об'єм циліндра, в якого повна поверхня рівна S .

11. Знайдіть відношення висоти конуса до діаметра основи конуса, який при заданому об'ємі V має найменшу бічну поверхню.

12.Вікно має форму прямокутника, завершеного зверху півкругом. Периметр вікна 5м. Якими мають бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільшу кількість світла?

13.Два пароплави рухаються перпендикулярними курсами зі швидкостями 30 і 40 км/год відповідно. У початковий момент часу перший знаходився за 100 км, а другий — за 300 км від точки перетину ліній руху. Через який час відстань між пароплавами буде найменшою? Обчислити цю відстань.

14. Серед усіх прямокутних трикутників площі S знайти той, для якого площа описаного круга буде найменшою.

15. В країні з населенням 20млн. Швидкість народження в кожний момент часу пропорційна кількості населення з коефіцієнтом k_1, а швидкість смертності пропорційна кількості населення з коефіцієнтом k_2. Знайти кількість населення в будь-який момент часу.

16. Куля масою $m=10$г з швидкістю $v_0=500$м/с влітає в стіну і, пробиваючи її, вилітає з неї з швидкістю $\upsilon_1=100$м/с. Знайти час руху кулі в стіні, якщо сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості руху кулі з коефіцієнтом $k=2$.

17.Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден — незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайдіть ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна — одна година, а другого — дві години.

18.Двоє людей мали зустрітись в певному місці між сьомою і восьмою годиною. Вони домовились, що кожен чекає іншого протягом чверті години. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться ?

19.Відрізок завдовжки l розділили на три частини, вибираючи будь-які дві точки поділу. Знайдіть ймовірність того, що з трьох утворених відрізків можна скласти трикутник.

20.Для складання екзамену студентам необхідно підготувати 30 питань. З 25 студентів 10 підготували всі питання, 8 – 25 питань, 5 – 20 питань і 2 – 15 питань. Студент, якого викликали, відповів на поставлене запитання. Знайдіть ймовірність того, що цей студент: а) підготовчі питання; б) підготував тільки половину питань.

21. Із 20 студентів, які прийшли на екзамен, 8 підготовлені відмінно, 6 — добре, 4 — посередньо і 2 — погано. В екзаменаційних білетах є 40 питань. Студент, який підготовлений відмінно, знає всі питання, добре — 35, посередньо — 25 і погано — 10 питань. Деякий студент відповів на всі 3 питання білета. Знайдіть ймовірність того, що він підготовлений: а) "добре"; б) "погано".

1.5. Зразки відповідей

Приклад 1. Доведіть, що множина $E=\left\{\frac{2n+3}{n+1}:n\in\mathbb{N}\right\}$ є обмеженою. **Розв'язання.** Вона є обмеженою, бо $0\le\frac{2n+3}{n+1}=\frac{2n+2}{n+1}+\frac{1}{n+1}=2+\frac{1}{n+1}\le 3$.

Приклад 2. Наведіть приклад нескінченної системи відкритих вкладених проміжків, перетин яких є порожнім.

Розв'язання. Нехай $(a_n;b_n)=(0;1/n)$. Тоді $(a_1;b_1)\supset(a_2;b_2)\supset\ldots\supset(a_n;b_n)\supset\ldots$ і перетин всіх цих проміжків $(a_n;b_n)$ є порожнім.

Приклад 3. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}.$$

Приклад 4. Наведіть приклад неперервної функції $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка не має похідної в одній точці $x_0=2$. **Розв'язання.** Нехай $F(x)=|x-2|$. Ця функція є неперервною в кожній точці $x\in\mathbb{R}$, як композиція двох неперервних функцій $\varphi(x)=x-2$ і $f(x)=|x|$. З іншого боку,

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\ \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Тому розглядувана функція не має похідної в точці $x_0=2$.

Приклад 5. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\sin x$ у точці $(x_0;y_0)$, для якої $x_0=\pi/3$.

Розв'язання. Оскільки $f'(x)=\cos x$, $f(x_0)=\sqrt{3}/2$ і $f'(x_0)=1/2$, то $y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(x-\pi/3)$ – шукане рівняння.

Приклад 6. Доведіть, що $|\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1|\le|x_2-x_1|$, $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in\mathbb{R}$.

Розв'язання. Нехай $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Тоді $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Згідно з теоремою Лагранжа $\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1=\frac{1}{1+c^2}(x_2-x_1)$, $c\in(x_1;x_2)$. Тому приходимо до потрібної нерівності.

Якщо $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<x_2$, , то $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1=\frac{1}{1+c^2}(x_2-x_1)$, $c\in(x_1;x_2)$. Тому

$$|\operatorname{arctg}x_2-\operatorname{arctg}x_1|\le|x_2-x_1|,\ x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in\mathbb{R}.$$

Приклад 7. Доведіть, що $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$, якщо $x\in(-1;+\infty)$. **Розв'язання.** Справді, позначимо ліву частину цієї рівності через $f(x)$. Тоді

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=0$$

для всіх $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Тому функція є сталою на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$ і $(-1;+\infty)$. Але $f(1)=\pi/4$. Тому $(\forall x\in(-1;+\infty)):f(x)=\pi/4$.

Приклад 8. Доведіть, що $e^x>1+x$ якщо $x\in(0;+\infty)$.

Розв'язання. Справді, нехай $f(x)=e^x-1-x$. Тоді $f'(x)=e^x-1>0$, якщо $x\in(0;+\infty)$. Отже, f є зростаючою на проміжку $[0;+\infty)$. Тому $f(x)>f(0)=0$, якщо $x\in(0;+\infty)$, тобто $e^x-1-x>0$, якщо $x\in(0;+\infty)$.

Приклад 9. Знайдіть множину значень функції $f(x)=xe^{-x}$. Розв'язування. Оскільки $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$, точка $x_1=1$ є єдиною точкою максимуму функції, $f(1)=1/e$, множиною значень функції на проміжках $(-\infty;1)$ і $(1;+\infty)$ є відповідно проміжки $(-\infty;1/e)$ і $(0;1/e)$, то $E(f)=(-\infty;1/e)$.

Приклад 10. Доведіть, що $e^{\frac{x+y}{2}} \le \frac{e^x + e^y}{2}$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = e^x$ є опуклою на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тому $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ для будь-яких $\alpha \in [0;1], x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$.Отже, розглядувана нерівність справедлива.

Приклад 11. Знайдіть інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$ і $dx = 2tdt$. Тоді

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \int \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int \frac{2t^2+2-2}{t^2+1} dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t^2+1} dt$$
$$= 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Приклад 12. Знайдіть інтеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$. **Розв'язання.** Зробимо заміну $x = 2\sin t$. Тоді $dx = 2\cos t dt$. Якщо $x = 0$, то $t = 0$. Якщо $x = 2$, то $t = \pi/2$. Крім цього, $2\sin([0;\pi/2]) = [0;2]$. Тому

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt = \pi.$$

Приклад 13. Доведіть, що $\pi/2 < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+8\cos^2 x} dx \le 3\pi/2$. **Розв'язання.** Справді, $1 \le \sqrt{1+8\cos^2 x} \le 3$, $x \in \mathbb{R}$. Тому $\pi/2 \le \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+8\cos^2 x} dx \le 3\pi/2$. Функція $f(x) = \sqrt{1+8\cos^2 x}$ є неперервною. Отже, знайдуться $c_1 > 1$ і проміжок $[a;b] \subset (0;\pi/2)$ такі, що $\sqrt{1+8\cos^2 x} \ge c_1$ для всіх $x \in [a;b]$. Якщо, наприклад, $\pi/2 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+8\cos^2 x} dx$, то

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+8\cos^2 x} dx = \int_0^a \sqrt{1+8\cos^2 x} dx + \int_a^b \sqrt{1+8\cos^2 x} dx$$
$$+ \int_b^{\pi/2} \sqrt{1+8\cos^2 x} dx \ge \int_0^a dx + \int_a^b c_1 dx + \int_b^{\pi/2} dx = a + c_1(b-a) + \frac{\pi}{2} - b = (b-a)(c_1 - 1) + \pi/2 > \pi/2,$$

і маємо суперечність.

Приклад 14. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = e^{-x}$ і $y = e^x$.

Розв'язування. $P = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 e^{-x} dx = 2 - \frac{2}{e}$.

Приклад 15. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2/n^2\right)^n$. **Розв'язання.** Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-2/n^2\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-2/n^2\right)^{-n^2/2}\right)^{-2n/n^2} = 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-2/n^2\right)^n$ є розбіжним.

Приклад 16. Дослідіть на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos\frac{k}{k^2+1} \sin\frac{1}{k}$. **Розв'язання.** Оскільки $0 < \cos\frac{k}{k^2+1} \le 1$, $k \in \mathbb{N}$, і $0 < \sin\frac{1}{k} \le \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, то $\frac{1}{\sqrt{k}} \cos\frac{k}{k^2+1} \sin\frac{1}{k} \le \frac{1}{k\sqrt{k}}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Але ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним. тому розглядуваний ряд є збіжним.

Приклад 17. Дослідіть на рівномірну збіжність функціональну послідовність $f_k(x)=\dfrac{kx}{1+k+x}-x$ на проміжку $[0;1]$. **Розв'язання.** Оскільки

$$\sup_{x\in[0;1]}\left\{\left|\frac{kx}{1+k+x}-x\right|\right\}\le\frac{2}{k+1}\to 0,\ k\to\infty,$$

то послідовність $\left(f_k(x)\right)$ рівномірно збігається до 0 на $[0;1]$.

Приклад 18. Дослідіть на поточкову збіжність функціональний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(x+1)^k}$. **Розв'язання.** Нехай $f_k(x)=\dfrac{1}{k(x+1)^k}$. Тоді $f_{k+1}(x)=\dfrac{1}{(k+1)(x+1)^{k+1}}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|f_{k+1}(x)|}{|f_k(x)|}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k|x+1|^k}{(k+1)|x+1|^{k+1}}=\dfrac{1}{|x+1|}$. Тому згідно з ознакою д'Аламбера для тих $x\in\mathbb{R}$, для яких $|x+1|>1$, ряд є збіжним абсолютно, а для тих $x\in\mathbb{R}$, для яких $|x+1|<1$, ряд є розбіжним. Якщо $|x+1|=1$, то $x=0$ або $x=-2$. У точці $x=0$ наш ряд перетворюється в числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$, який є розбіжним. В точці $x=-2$ наш ряд перетворюється в числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$, який є збіжним умовно. Тому множина $(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$ є множиною збіжності ряду, а множина $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ є множиною абсолютної збіжності розглядуваного ряду.

Приклад 19. Дослідіть на рівномірну збіжність на проміжку $(-\infty;+\infty)$, функціональний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(x+1)^k}$. **Розв'язання.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty;+\infty)$, бо $\dfrac{1}{k^2+x^2}\le\dfrac{1}{k^2}$, $k\in\mathbb{N}$, $x\in(-\infty;+\infty)$ і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1/k^2$ є збіжним

Приклад 20. Знайдіть проміжок і радіус збіжності степеневого ряду ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^{2n}$. **Розв'язання.** Нехай $a_k=2^k(x-1)^{2k}$. Тоді $a_{k+1}=2^{k+1}(x-1)^{2(k+1)}$ і

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}|x-1|^{2(k+1)}}{2^k|x-1|^{2k}}=2|x-1|^2.$$

Бачимо, що ряд є збіжним абсолютно, якщо $|x-1|<1/\sqrt{2}$, і є розбіжним, якщо $|x-1|>1/\sqrt{2}$. Отже, радіус збіжності ряду дорівнює $1/\sqrt{2}$. Якщо $x=1+1/\sqrt{2}$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$. Якщо $x=1-1/\sqrt{2}$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$. Отже, $R=1/\sqrt{2}$ – радіус збіжності розглядуваного ряду, $\left(1-1/\sqrt{2};1+1/\sqrt{2}\right)$ – його проміжок збіжності, для $x\notin\left(1-1/\sqrt{2};1+1/\sqrt{2}\right)$ ряд є розбіжним.

Приклад 21. Знайдіть розвинення в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функції $f(x)=\dfrac{1}{1+2x^2}$. **Розв'язання.** Оскільки $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$, якщо $|x|<1$ то

$$\frac{1}{1+2x^2}=\frac{1}{1-(-(\sqrt{2}x)^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\sqrt{2}x\right)^2\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k2^kx^{2k},\quad |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 22. З'ясуйте в яких точках $z = x + iy$ має похідну функція $f(z) = |z|^2 z$. **Розв'язання.**Нехай $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$. Тоді $u = x^3 + y^2 x$ і $v = y^3 + x^2 y$. Функції u та v як функції двох змінних є диференційованими в кожній точці $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ і

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 + x^2.$$

Бачимо, що умови Коші-Рімана $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$ виконуються тільки в точці $z = 0$ і розглядувана функція має похідну тільки в цій точці, причому $f'(0) = 0$, бо $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x; y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x; y)$.

Приклад 23. З'ясуйте, на яку область функція $w = e^{-i\pi/4} z$ відображає кут $\mathbb{C}(0; \pi/2) = \left\{ z : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \right\}$. **Розв'язання.** Функція $w = e^{-i\pi/4} z$ є лінійною (лінійною однорідною) і повертає область $\mathbb{C}(0; \pi/2) = \left\{ z : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \right\}$ на кут $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ і, отже, відображає $\mathbb{C}(0; \pi/2)$ на кут $\mathbb{C}(-\pi/4; \pi/4) = \left\{ z : -\dfrac{\pi}{4} < \arg w < \dfrac{\pi}{4} \right\}$.

Приклад 24. Знайдіть $I = \int\limits_{\gamma} |z||dz|$, де $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0; \pi]$. **Розв'язання.** Оскільки $\gamma(t) = 2\cos t + 2i\sin t$, то

$$I = \int\limits_0^{\pi} \left|2e^{it}\right| \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt = 4\int\limits_0^{\pi} dt = 4\pi .$$

Приклад 25. Знайдіть $\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(0;2\pi)} \dfrac{\sin\zeta}{\zeta - \pi} d\zeta$, де $\partial U(0; 2\pi) = \{ z : |z| = 2\pi \}$. **Розв'язання.** Згідно з інтегральною формулою Коші $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \dfrac{f(\zeta)}{t - z} d\zeta$, $z \in D$. Тому

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(0;2\pi)} \frac{\sin\zeta}{\zeta - \pi} d\zeta = \sin\pi = 0. \ ,$$

Приклад 26. Знайдіть радіус і круг збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} z^{2n}.$$

Розв'язання. Нехай $u_n = \left|2^n z^{2n} / n\right|$. Тоді $u_{n+1} = \left|2^{n+1} z^{2(n+1)} / (n+1)\right|$ і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2|z|^2 n}{n+1} = 2|z|^2.$$

Бачимо, що розглядуваний ряд буде збіжним, якщо $2|z|^2 < 1$, і буде розбіжним, якщо $2|z|^2 > 1$. Робимо висновок, що $R = 1/\sqrt{2}$ – радіус збіжності і $U(0; 1/\sqrt{2}) = \left\{ z : |z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ – круг збіжності. До такого ж висновку можна прийти і наступними міркуваннями. Оскільки для розглядуваного ряду

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{2^n}{n}, & k = 2n, \\ 0, & k = 2n+1, \end{cases}$$

то

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|b_k|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{|b_{2n}|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{2^n}{n}}=\sqrt{2}$$

і на підставі формули $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n|^{1/n}}$ для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k z^k$ знову приходимо до вказаного вище висновку.

Приклад 27. Знайдіть нулі функції

$$f(z)=z^8(z+2)^3\sin z$$

та їх порядки. **Розв'язання.** Функція $\sin z$ має нулі в точках $\lambda_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, і тільки в них. Оскільки $\sin' z=\cos z$ і $\cos\lambda_k=\cos\pi k=(-1)^k\neq 0$, то в усіх точках $\lambda_k=\pi k$ функція $\sin z$ має прості нулі. Тому подається у вигляді $\sin z=(z-\lambda_k)g_k(z)$, де g_k – функція, голоморфна в точці λ_k і $g_k(\lambda_k)\neq 0$. Функція $z^8(z+2)^3$ має нулі в точках $\lambda_0=0$ та $\tilde{\lambda}_0=-2$ і тільки в них, в точці $\lambda_0=0$ має нуль порядку $m=8$, а в точці $\tilde{\lambda}_0=-2$ нуль порядку $m=3$. Робимо висновок, що $f(z)=(z-\lambda_0)^9 q_0(z)$, $f(z)=(z-\tilde{\lambda}_0)^3\tilde{g}_0(z)$ та $f(z)=(z-\lambda_k)h_k(z)$ і функції q_0, $\tilde{g}_0$ та h_k для $k\neq 0$ є голоморфними в точках $\lambda_0=0$, $\tilde{\lambda}_0=-2$ та λ_k, $k\neq 0$, відповідно, і їх значення у вказаних точках є відмінними від 0. Тому функція $f(z)=z^8(z+2)^3\sin z$ має нуль дев'ятого порядку в точці $\lambda_0=0$, нуль третього порядку в точці $\tilde{\lambda}_0=-2$ та прості нулі в точках $\lambda_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Приклад 28. Знайдіть розвинення в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функції $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$. **Розв'язання.** Оскільки

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k,\ |z|<1,$$

то

$$f(z)=\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^k,\ |z|<2.$$

Приклад 29. Знайдіть лишок функції $f(z)=z/(1-z)^2$ в точці $z=1$. **Розв'язування.** Функція f в точці $z=1$ має полюс другого порядку . Тому

$$\operatorname*{res}_1 f=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\frac{z}{(1-z)^2}\right)=1.$$

Приклад 30. Знайдіть міру Лебега множини $A=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(k^2-\dfrac{1}{k(k+1)};k^2+\dfrac{1}{k(k+1)}\right)$. **Розв'язання.** Множина A є об'єднанням попарно неперетинних проміжків $\Delta_k=\left(k^2-\dfrac{1}{k(k+1)};k^2+\dfrac{1}{k(k+1)}\right)$ з мірою $\mu(\Delta_k)=\dfrac{2}{k(k+1)}=2\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$. Тому $\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(\Delta_k)=2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=2$.

Приклад 31. Знайдіть інтеграл Лебега $\int\limits_A f d\mu$, де $A=[0;1]\setminus\mathbb{Q}$, $f(x)=\arcsin x$ і μ –міра Лебега на $\mathbb{R}$. **Розв'язання.** Оскільки множина $\mathbb{Q}$ раціональних чисел є зліченною, то $\mu(\mathbb{Q})=0$. Тому

$$\int\limits_A f d\mu=\int\limits_{[0;1]}\arcsin x dx=x\arcsin x\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)=\frac{\pi}{2}+\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

Приклад 32. Знайдіть норму вектора $z=(1-i;1)$ простору $\mathbb{C}^2$. **Розв'язання.** Норма вектора $z=(z_1;z_2;...z_n)$ простору $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}_2^n$ знаходиться за формулою $\|z\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}$. Тому $\|z\|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}=\sqrt{|1-i|^2+|1|^2}=\sqrt{3}$.

Приклад 33. Знайдіть скалярний добуток векторів $x(t)=e^t$ **і** $y(t)=e^{int}, n\geq 2$, простору $L_2(-\pi;\pi)$. **Розв'язання.**

$$\langle x;y\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\overline{y(t)}dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^t\cdot e^{-int}dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)t}dt=\frac{e^{(1-in)t}}{(1-in)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{(1-in)}=\frac{2i\sin\pi(1-in)}{(1-in)}.$$

Приклад 34. Знайдіть відстань між функціями $f_1(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2$ і $f_2(x)=4x$ в просторі $C[0;3]$. **Розв'язання.** Згідно з означенням $d(f_1;f_2)=\max\{|f_1(x)-f_2(x)|:x\in[1;3]\}$. Знайдемо найбільше значення функції $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x$ на проміжку $[1;3]$. Оскільки $f'(x)=x^2+3x-4$, точки $x_1=-4$ і $x_2=1$ є стаціонарними точками функції, $x_1\notin[1;3]$, $f(1)=-13/6$, $f(3)=21/2$ і $f'(x)>0$, якщо $x\in[1;3]$, то $d(f_1;f_2)=\max\{|f(x)|:x\in[1;3]\}=\max\{f(x):x\in[1;3]\}=f(3)=21/2$.

Приклад 35. Методом послідовних наближень знайдіть друге наближення в просторі $C[0;1]$ розв'язку рівняння $\int_0^1\frac{xt}{1+u^2(t)}dt=u(x)$, взявши $u_0(t)=0$. **Розв'язання.** Нехай A оператор, визначений формулою $Au(x)=\int_0^1\frac{xt}{1+u^2(t)}dt$. Тоді наше рівняння перепишеться у вигляді $A(u)=u$, $u_n=A(u_{n-1})$, $u_1(x)=\int_0^1 xtdt=\frac{1}{2}x$ і $u_2(x)=\int_0^1\frac{4xt}{4+t^2}dt=2x\int_0^1\frac{d\left(4+t^2\right)}{4+t^2}=2x\ln\frac{5}{4}$.

Приклад 36. Знайдіть розв'язки рівняння $y'=e^{-y}x$. **Розв'язання.** $\frac{dy}{dx}=2e^{-y}dx$, $e^y dy=2xdx$,

$$\int e^y dy=2\int xdx,\qquad e^y=x^2+c.$$

Тому формулою $y=\ln(x^2+c), c>0,$ задаються всі розв'язки нашого рівняння (1) на $(-\infty;+\infty)$. Ця ж формула, в якій $c\geq -a^2$, який задає всі розв'язки розв'язуваного рівняння на кожному із проміжків $(-\infty;-|a|)$ і $(|a|;+\infty)$.

Приклад 37. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y'=\frac{xy}{x^2-y^2}$. **Розв'язання.** Наше рівняння є однорідним відносно змінних. Нехай $y=xu$. Тоді для знаходження u отримуємо рівняння $xu'+u=\frac{u}{1-u^2}$, $\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{1-u^2}{u^3}=\int\frac{dx}{x}$, $\frac{u^{-2}}{2}-\ln|u|=\ln|x|+c$, звідки $-\frac{1}{2y^2}-\ln|y/x|=c$.Останнє рівняння ми не вміємо розв'язати відносно y, тобто не можемо записати у вигляді формули $y=y(x;c)$, права частина якої є елементарною функцією. Незважаючи на це, процес знаходження всіх розв'язків рівняння вважаємо завершеним, а рівність. $-\frac{1}{2y^2}-\ln|y/x|=c$ зветься загальним інтегралом нашого рівняння..

Приклад 38. Знайдіть всі розв'язки рівняння $y'-y=2$. **Розв'язання.** Складаємо відповідне однорідне рівняння $y'-y=0$. Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\frac{dy}{dx} = y, \qquad \frac{dy}{y} = dx, \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx \ , \qquad \ln y = x + \ln c \, .$$

Отже, формула $y = ce^x$ задає всі розв'язки однорідного рівняння . Шукаємо розв'язок нашого рівняння у вигляді $y = ce^x$, де $c = c(x)$ – нова невідома функція. Тоді $y' = c'e^x + ce^x$ і підставивши у вихідне рівняння отримуємо $c'e^x + ce^x - ce^x = 2$, звідси $c' = 2e^{-x}$. Тому $c = 2\int e^{-x}dx = -2e^{-x} + c_1$.Отже, формула $y = (-2e^{-x} + c_1)e^x$, $c_1 \in (-\infty;+\infty)$.
задає всі розв'язки рівняння.

Приклад 39. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y'' - 4x\sqrt{y'} = 0$. **Розв'язання.** Нехай $y' = z$. Тоді $y'' = z'$, $z' - 2x\sqrt{z} = 0$, $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\int xdx$, $\sqrt{z} = x^2 + c_1$, $z = (x^2 + c_1)^2$,

$$y' = (x^2 + c_1)^2 = x^4 + 2x^2 + c_1^2, \; y = \int (x^4 + 2x^2 + c_1^2)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + c_1^2 x + c_2 \, .$$

Приклад 40. Розв'яжіть задачу Коші $y'' + y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$. **Розв'язання.** *Складаємо характеристичне рівняння* $\lambda^2 + 1 = 0$. *Його корені* $\lambda_1 = i$ *та* $\lambda_2 = -i$ *є комплексними. Отже,* $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ *– загальний розв'язок однорідне рівняння . Для знаходження сталих* c_1 *знайдемо* y' *.Маємо* $y' = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ *і складаємо систему*

$$\begin{cases} -c_1 1 + c_2 0 = 0, \\ -c_1 0 + c_2 1 = 1. \end{cases}$$

Отже , $c_1 = 1$ *і* $c_2 = 0$. *Тому функція* $y = \cos x$ *є шуканим розв'язком.*

Приклад 41. Розв'яжіть крайову задачу $y'' + y = 0$, $y(0) = 1, y'(\pi) = 1$. **Розв'язання.** Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ і знаходимо загальний розв'язок рівняння $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Тоді $y' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$. Використовуючи крайові умови знаходження сталих c_1 і c_2, отримуємо систему $\begin{cases} c_1 + 0c_2 = 0, \\ -0c_1 - 1c_2 = 1. \end{cases}$ Отже, $c_1 = 0$, $c_2 = -1$ і $y = \sin x$ – потрібний розв'язок.

Приклад 42. В ящику міститься дві білі і три чорні кулі. Навгад виймають одну кульку. Знайдіть ймовірність $P(A)$ того, що ця кулька буде білою (подія A). **Розв'язання.** Загальна кількість випадків $n = 5$, кількість випадків, які сприяють події $m = 2$, Тому $P(A) = \frac{2}{5}$.

1.6. Рекомендована література.

Основна:

1. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В. Математичний аналіз. Границі. Навчальний посібник. Лекції та практичні завдання. – Дрогобич НВЦ "Каменяр", 2003. – 125 с.
2. Винницький Б.В., Шаран В.Л. Математичний аналіз. Ч. 3 – 4. Методичний посібник. Лекції та практичні завдання. – Дрогобич НВЦ "Каменяр", 2001. – 226 с.
3. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В. Шаран В.Л. Математичний аналіз. Ч. 5 – 6. Методичний посібник. Лекції та практичні завдання. – Дрогобич НВЦ "Каменяр", 2002. – 234 с.
4. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної, Ч.1 – Дрогобич, Коло, 2010, 500 с..
5. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної, Ч. 2 – Дрогобич, Коло, 2011, 500 с..
6. Винницький Б.В., Шепарович І.Б. Математичний аналіз. Ч. 7. Навчальний посіб-ник. Лекції та практичні завдання. – Дрогобич НВЦ "Каменяр", 2002. - 122 с.
7. Винницький Б.В., Дільний В.М., Шепарович І.Б. Математичний аналіз. Ч. 8 – 10. Навчальний посібник. Лекції та практичні завдання. – Дрогобич НВЦ "Каменяр", 2003. – 186 с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Наука, 1968. -529 с.

9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
10. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1971. – 417 с.
11. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу.— М.:Просвещение, 1973.— 254с.
12. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1994. – Ч. 1. – 423 с.
13. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2005. – Ч. 2. – 510 с.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 616 с; Т. 2. – 800 с; Т. 3. – 656 с.
15. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. – К.: Вища шк., 1990. – Ч. 1. – 380 с.; Ч. 2. – 1991. – 365 с.; Ч. 3. – 1992. – 360 с.
16. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Либідь, 1993. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 299 с.
17. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2002. – Ч. 1. – 463 с; Ч. 2. – 2003. – 470 с.
18. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: МЦНМО, 2001. – Ч. 1. – 664 с.; Ч. 2. – 2002. – 794 с.
19. Винницький Б.В., Дільний В.М., Шепарович І.Б. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних. Ч.1. – Дрогобич: ВВДДПУ, 2015 – 208 с.
20. Винницький Б.В., Дільний В.М., Шепарович І.Б. Основи багатовимірного аналізу. У 3-х част. – Дрогобич: Коло, 2008. Ч.1– 347 с., Ч.2– 161 с. Ч.3– 179 с.
21. Богдан Винницький, Володимир Дільний, Руслан Хаць, Ірина Шепарович Функціональний аналіз, Ч.1– Дрогобич: Видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка. 2014, 151 с.
22. Богдан Винницький, Руслан Хаць. Функціональний аналіз, Ч.1– Дрогобич: Видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка. 2015, 136 с..
23. Богдан Винницький, , Ірина Шепарович. Комплексний аналіз. Частина І. Дрогобич: Видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка.. 2015.272с.
24. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Скасків О.Б. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2002. – 203 с.
25. Евграфов М.А., Бежанов К.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
26. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: В 2-х т. – М.: Наука, 1968. – Т. 1. – 321 с.; Т. 2. – 321 с.
27. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шепарович І.Б. Основи одномірного комплексного аналізу: Навчально-методичний посібник. – Дрогобич: ДДПУ. 2012. – 283 с.
28. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.-Минск.: Высшэйшая школа.-1974.-766с.
29. Шкіль М.І., Сотниченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння.-К.:Вища школа 1992 -303 с.
30. . Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях.— М.: Наука,
31. 1987. — 158 с.
32. Беляева Х.С., Монахов В.И. Экстремальные задачи. — М.: Просвещение,
33. 1977. — 144с.
34. . Борисенко С.Д. Побудова математичних моделей.— К.: Вища школа, 1995.—148с.
35. Михайленко В.М., Антонюк Р.А. Сборник прикладных задач по высшей математике.— К.: Вища школа, 1990.— 166 с.
36. Нагибин Ф.Ф. Экстремумы. — М.: Просвещение, 1968. — 104с.
37. Винницький Б.В., Шавала О.В. Диференціальні рівняння, Ч.1. Дрогобич: Видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка. 2014, 136с.
38. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.Наука, 1971.-321 с.
39. Солодовников А.С. Теория вероятностей: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по мат. специальностям. — М.: Просвещение, 1983. — 207с.
40. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей: Підручник. – К.: Вища школа,1994. –192с.
41. Андрухаев Х.М. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для
42. студентов пед. ин-тов по мат. специальностям. – М.: Просвещение, 1985. – 160с.

43. Гіхман І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теорія ймовірностей і математична
44. статистика.— К.:Вища школа, 1988.— 439с.
45. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології: Навч.посібник.— К.:Вища школа, 1995.— 351с.

Додаткова:

46. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу/ Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
47. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 352 с.
48. Глушков П.М., Шунда Н.М. Диференціальне числення функції однієї змінної. – К.: Вища шк., 1991. – 270 с.
49. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. – К.: Вища шк., 1990. – Ч. 1. – 380 с.; Ч. 2. – 1991. – 365 с.; Ч. 3. – 1992. – 360 с.
50. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Либідь, 1993. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 299 с.
51. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2002. – Ч. 1. – 463 с; Ч. 2. – 2003. – 470 с.
52. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: МЦНМО, 2001. – Ч. 1. – 664 с.; Ч. 2. – 2002. – 794 с.
53. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1985. – Ч. 1. – 662 с.; Ч. 2. – 1987. – 358 с.
54. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 616 с.
55. Коровкин П.П. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Просвещение, 1972. – Ч. 1. – 447 с.
56. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3-х т. – М.: Высш. шк., 1988. – Т. 1. – 712 с.; Т. 2. – 576 с.; Т. 3. – 1989. – 352 с.
57. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1992. – Ч. 1 – 495 с.; Ч. 2. – 1993. – 375 с.
58. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ: В 3-х ч. – К.: Вища шк., 1983. – Ч. 1. – 495 с.
59. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.
60. Шварц Л. Анализ: В 2-х т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 824 с.; Т. 2.–528 с.
61. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1-2. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
62. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2-х ч./ Под общ. ред. В.А. Садовничего. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – Ч. 1. – 416 с; Ч. 2. – 1991. – 352 с.
63. Задачи и упражнения по математическому анализу/ Для втузов. Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
64. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 464 с.
65. Егорова И.А. Задачник-практикум по математическому анализу: В 3-х ч. – М.: Учпедгиз, 1962. – Ч. 3. – 105 с.
66. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984. – 592 с.
67. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: В 3-х т. – М.: Едиториал, 2001. – Т. 1. – 360 с; Т. 2. – 2003. – 224 с.; Т. 3. – 2001. – 224 с
68. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высш. шк., 1964. – 336 с.

69. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3-х ч./ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державець, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 1990. – Ч. 1. – 271 с.; Ч. 2. – 1991. – 352 с.
70. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 616 с; Т. 2. – 800 с; Т. 3. – 656 с.
71. Винницький Б.В. Міра та інтеграл Лебега. – Дрогобич: Електронний навчальний посібник. 2013. – 352 с.
72. Халмош П. Теория меры.- М.:Изд-во иностр. лит., 1953. – 264 с
73. Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла.-К.: Вища школа. 1989. – 284 с
74. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 454 с
75. Леонтьева Т.А., Парфёнов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций действительного переменного. - М.: МГУ, 1997 – 208 с.
76. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольський В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1977– 224 с.
77. Винницький Б.В. Міра та інтеграл Лебега. – Дрогобич: Електронний навчальний посібник. 2013. – 352 с.

Розділ 2. Лінійна алгебра. Алгебра і теорія чисел

2.1. Загальні положення.

Випускники повинні володіти такими поняттями лінійної алгебри, як методи розв'язання та дослідження систем лінійних рівнянь, знати основні алгебраїчні системи (групи, кільця, поля), зокрема поле комплексних чисел, теорію лінійних, евклідових просторів та лінійних операторів, квадратичні форми. Випускники повинні знати основні поняття та теорії сучасної алгебри і теорії чисел, а саме: теорію подільності в кільці цілих чисел, теорію конгруенцій, кільце многочленів від однієї, кількох змінних та многочленів над числовими полями, алгебраїчні розширення полів.

2.2. Лінійна алгебра. Основні факти

1. Системи лінійних рівнянь.
2. Дослідження систем лінійних рівнянь.
3. Числові поля. Поле комплексних чисел.
4. Лінійні простори.
5. Евклідові та унітарні простори.
6. Лінійні оператори.
7. Лінійні оператори на евклідовому та унітарному просторах.
8. Квадратичні форми.

2.3. Лінійна алгебра. Зразки завдань

1. Матриці та операції над ними. Частинні випадки множення матриць. Властивості операцій над матрицями.
2. Перестановки, інверсії, транспозиції та підстановки. Визначники 2-го, 3-го, *n*-го порядку та їхні властивості.
3. Мінори й алгебраїчні доповнення. Розклад визначника за рядком або стовпцем. Теорема Лапласа.
4. Оборотні матриці. Теорема про визначник добутку матриць, наслідки.
5. Числові вектори та операції над ними. Арифметичний *n*-вимірний векторний простір.
6. Векторний простір, приклади. Найпростіші наслідки із системи аксіом векторного простору.
7. Підпростір векторного простору, приклади. Критерій підпростору. Лінійна оболонка векторів.
8. Лінійне рівняння. Система лінійних рівнянь. Загальна та векторна форми запису системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи. Основна й розширена матриці системи. Сумісна й несумісна системи. Визначена і невизначена системи.
9. Рівносильні системи рівнянь. Наслідок системи.
10. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь. Теорема про елементарні перетворення.
11. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь. Загальний розв'язок системи лінійних рівнянь.
12. Поняття лінійно залежної і лінійно незалежної систем векторів. Властивості.
13. Рівносильні системи векторів. Базис і ранг системи векторів.
14. Базис і ранг арифметичного *n*-вимірного векторного простору V_n.
15. Елементарні перетворення матриці. Ранг матриці. Теорема про рівність рядкового і стовпцевого рангів матриці.
16. Зведення матриці до східчастого вигляду. Обчислення рангу матриці.
17. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь.
18. Критерій визначеності системи лінійних рівнянь.
19. Системи лінійних однорідних рівнянь. Умови, при яких однорідна система лінійних рівнянь має ненульові розв'язки.
20. Простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків. Теорема про фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь.
21. Зв'язок між розв'язками неоднорідної і однорідної систем рівнянь.
22. Особливі та неособливі матриці. Теореми про зведення неособливої матриці до одиничної та про оборотність неособливої матриці.
23. Необхідна і достатня умова рівності нулю визначника. Наслідки.

24. Теорема про ранг матриці в термінах визначників.
25. Необхідна і достатня умова оборотності квадратної матриці. Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень.
26. Матрична форма системи лінійних рівнянь. Розв'язування матричних рівнянь.
27. Формули Крамера.
28. Поняття бінарного відношення з однієї множини в іншу. Способи задання бінарних відношень. Область визначення та область значень відношення. Композиція двох відношень. Обернене та протилежне відношення. Бінарні відношення на множині. Граф та графік бінарного відношення.
29. Поняття відображення (функції). Ін'єкція, сюр'єкція, бієкція.
30. Відношення еквівалентності. Розбиття множини на класи. Фактор-множина.
31. Відношення порядку.
32. Алгебраїчні операції та алгебраїчні системи.
33. Аксіоми Пеано та наслідки з них. Операції додавання і множення натуральних чисел та їхні властивості.
34. Порівняння натуральних чисел.
35. Принцип математичної індукції, різні його форми.
36. Означення групи; властивості, що з нього випливають.
37. Поняття підгрупи, приклади. Критерій підгрупи.
38. Кільця; їхні властивості. Підкільце; критерій підкільця.
39. Поля; їхні властивості. Підполе; критерій підполя.
40. Упорядковані поля, їхні властивості.
41. Гомоморфізм та ізоморфізм груп, кілець та полів.
42. Поле раціональних чисел.
43. Поле дійсних чисел (означення). Наслідки з аксіом поля дійсних чисел.
44. Побудова поля комплексних чисел як упорядкованих пар дійсних чисел.
45. Алгебраїчна форма комплексного числа. Властивості спряжених комплексних чисел.
46. Геометричне зображення комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа.
47. Множення і ділення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі.
48. Геометрична інтерпретація операцій над комплексними числами.
49. Формула Муавра.
50. Добування квадратного кореня з комплексного числа.
51. Добування кореня n-го степеня з комплексного числа.
52. Корені з одиниці.
53. Двочленні рівняння.
54. Означення векторного простору та його найпростіші властивості.
55. Базис і розмірність векторного простору. Теореми про базис і розмірність векторного простору.
56. Зв'язок між базисами.
57. Координати вектора у заданому базисі. Перетворення координат вектора при переході до іншого базису.
58. Евклідові та унітарні простори. Наслідки з аксіом скалярного добутку. Приклади. Теорема про перетворення векторного простору в евклідовий.
59. Норма вектора. Нерівність Коші-Буняковського. Кут між векторами.
60. Теорема Піфагора. Нерівність трикутника.
61. Підпростори векторного простору. Перетин і сума підпросторів. Теорема про розмірність суми підпросторів.
62. Пряма сума підпросторів. Критерій прямої суми. Теорема про розмірність прямої суми підпросторів.
63. Ортогональна система векторів. Теореми про ортогональність вектора лінійній комбінації векторів та про лінійну незалежність ортогональної системи векторів.
64. Ортогональний базис. Процес ортогоналізації системи векторів.
65. Ортонормований базис. Властивості ортонормованих базисів.
66. Ортогональність вектора до підпростору. Ортогональні підпростори. Ортогональне доповнення підпростору, його властивості.
67. Теорема про розклад евклідового простору в пряму суму будь-якого його підпростору і його ортогонального доповнення.
68. Ізоморфізм векторних просторів, його властивості.
69. Необхідна і достатня умова ізоморфності двох скінченновимірних векторних просторів.
70. Ізоморфізм евклідових просторів.
71. Означення, властивості та приклади лінійних операторів.

72. Задання лінійного оператора за допомогою відображення базису.
73. Матриця лінійного оператора. Теорема про координатний рядок вектора $\vec{x}A$.
74. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах. Подібні матриці.
75. Дії над лінійними операторами та їхні властивості. Адитивна група, кільце, векторний простір лінійних операторів.
76. Лінійні алгебри, приклади. Алгебра лінійних операторів векторного простору.
77. Ізоморфізм лінійних алгебр. Ізоморфізм алгебри лінійних операторів і алгебри матриць.
78. Область значень і ранг лінійного оператора. Теорема про ранг лінійного оператора.
79. Ядро і дефект лінійного оператора. Теорема про суму рангу і дефекту лінійного оператора.
80. Вироджені і невироджені оператори. Властивості невироджених лінійних операторів.
81. Обернений оператор, умова його існування. Повна лінійна група.
82. Підпростори, інваріантні відносно лінійного оператора, приклади.
83. Власні вектори, власні значення, характеристична матриця, характеристичне рівняння, характеристичні корені лінійного оператора. Властивості системи власних векторів, що відповідають попарно різним власним значенням. Теорема про знаходження власних векторів і власних значень.
84. Лінійні оператори з простим спектром. Зведення матриці до діагонального вигляду.
85. Ортогональні оператори, приклади. Необхідна і достатня умова ортогональності оператора. Ортогональні матриці. Теорема про групу ортогональних матриць. Властивість рядків (стовпців) ортогональної матриці. Теорема про зв'язок ортогональних (унітарних) операторів з ортогональними (унітарними) матрицями.
86. Спряжений лінійний оператор та його існування. Властивості операції переходу до спряженого оператора.
87. Самоспряжені оператори. Симетричні та ермітові оператори. Необхідна і достатня умова симетричності лінійного оператора в евклідовому просторі. Теореми про власні значення симетричного оператора.
88. Квадратичні форми. Матриця квадратичної форми. Теорема про зв'язок між матрицями квадратичної форми при лінійному перетворенні змінних.
89. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень.
90. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа.
91. Еквівалентні квадратичні форми. Ранг квадратичної форми. Закон інерції. Нормальна квадратична форма.
92. Класифікація квадратичних форм. Необхідна і достатня умова додатної визначеності квадратичної форми. Головні мінори квадратичної форми. Критерій Сільвестра.
93. Перемножити матриці: $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.
94. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0$.
95. Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1234 & 5678 \\ 234 & 4678 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -3 & -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

96. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{x} = 6\vec{c}$, де $\vec{a} = (1,-3,2)$, $\vec{b} = (\frac{1}{9}, \frac{11}{3}, -2)$, $\vec{c} = (1, \frac{2}{3}, -2)$.
97. Перевірити, чи утворюють лінійний підпростір в арифметичному векторному просторі V_n вектори, в кожного з яких координати з парними номерами рівні між собою.
98. Використовуючи метод Гаусса, дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності знайти розв'язок (загальний розв'язок):

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126, \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

99. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ 2x - y + z = 9, \\ x - 4y + 2z = 11. \end{cases}$

100. Розв'язати систему рівнянь матричним методом: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

101. Розв'язати матричне рівняння: 1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

102. Обчислити матрицю, обернену до даної: $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

103. З'ясувати, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:

$$\vec{a_1} = (4,-5,2,6),\ \vec{a_2} = (2,-2,1,3),\ \vec{a_3} = (6,-3,3,9),\ \vec{a_4} = (4,-1,5,6).$$

104. Побудувати граф і графік відношення $x = y$, заданого на множині $X=\{2,4,6,8,10\}$.

105. Побудувати графік функціонального відношення, заданого на множині дійсних чисел:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \le 0, \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$$

106. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$: **1)** $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right) = -\frac{2n+1}{2n-1}$; 2) $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$.

107. Чи є кільцем (полем) множина всіх чисел вигляду $a + b\sqrt[3]{3}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$?

108. Обчислити: 1) $(1+i)^{2019}$; 2) $\sqrt{-11+60i}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}$.

109. Знайти геометричне місце точок, які зображають комплексні числа Z, що задовольняють умови: 1) $|z+2i| \le |z-1|$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z|$.

110. Розв'язати рівняння в полі комплексних чисел: $z|z| - 2z + i = 0$.

111. Довести, що вектори $\vec{a_1} = (1,1,-1)$, $\vec{a_2} = (1,2,1)$, $\vec{a_3} = (3,2,1)$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x} = (1,7,-1)$ у цьому базисі.

112. Довести, що кожна з двох заданих систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між координатами того самого довільно вибраного вектора в цих двох базисах, якщо:

$$\vec{e_1} = (1,1,1),\ \vec{e_2} = (1,-1,2),\ \vec{e_3} = (1,3,-1);\ \vec{e_1'} = (1,-1,1),\ \vec{e_2'} = (1,2,-1),\ \vec{e_3'} = (2,2,-1).$$

113. Знайти координати матриці $A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ в базисі: $B'\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

114. Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину векторних підпросторів U і V, заданих як лінійні оболонки векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ і $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_l}$ відповідно: $\vec{a_1} = (1,0,1)$, $\vec{a_2} = (-1,2,1)$, $\vec{a_3} = (0,2,2)$; $\vec{b_1} = (3,2,1)$, $\vec{b_2} = (2,1,0)$, $\vec{b_3} = (1,1,1)$.

115. Знайти базиси суми і перетину векторних підпросторів U і V, заданих як лінійні оболонки векторів $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ і $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_l}$ відповідно:

$\vec{a}_1 = (1,1,1,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0,0)$, $\vec{a}_3 = (-1,2,0,1)$; $\vec{b}_1 = (0,1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (2,1,1,0)$, $\vec{b}_3 = (0,2,1,1)$.

116. Ортогоналізувати систему векторів: $\vec{b}_1 = (-1,3,2,1)$, $\vec{b}_2 = (0,0,5,5)$, $\vec{b}_3 = (2,1,-1,1)$.

117. Перевірити, чи вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні, і коли так, то доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, в якому вони розглядаються, якщо:

$$\vec{a}_1 = (6,1,-5,2),\ \vec{a}_2 = (2,4,2,-3).$$

118. Знайти базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$ підпростору U, якщо U є лінійною оболонкою векторів: $\vec{a}_1 = (1,1,0,-2)$, $\vec{a}_2 = (2,1,-1,1)$, $\vec{a}_3 = (3,2,-1,-1)$.

119. Знайти базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$ підпростору U, якщо лінійний підпростір U задано як простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

120. Знайти ортогональну проекцію $\vec{x}_U$ й ортогональну складову $\vec{x}_{U^{\perp}}$ вектора $\vec{x}$ на лінійний підпростір U, якщо: $\vec{x} = (4,-1,-3,4)$, U є лінійною оболонкою векторів $\vec{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,2,-1)$, $\vec{a}_3 = (1,0,0,3)$.

121. Довести, що існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно, і знайти матрицю A цього оператора в тому самому базисі, в якому задано координати всіх векторів, якщо:
$\vec{a}_1 = (2,3,5), \vec{b}_1 = (1,1,1), \vec{a}_2 = (0,1,2), \vec{b}_2 = (1,1,-1), \vec{a}_3 = (1,0,0), \vec{b}_3 = (2,1,2).$

122. Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ має матрицю: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

123. Знайти його матрицю A' в базисі $B'\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, якщо: $\vec{a}_1 = (0,-1,0), \vec{a}_2 = (0,1,-1), \vec{a}_3 = (1,0,0),$ $\vec{b}_1 = (1,3,2), \vec{b}_2 = (-1,0,0), \vec{b}_3 = (1,1,1)$.

124. Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ має матрицю: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

125. Знайти матрицю A' цього самого оператора в базисі: $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

126. Нехай лінійний оператор A в базисі $\vec{a}_1 = (-3,-1), \vec{a}_2 = (7,2)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1 = (3,2),\ \vec{b}_2 = (4,3)$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -21 & 15 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю X лінійних операторів AB і BA в базисі, в якому задано координати всіх векторів.

127. Які з наступних матриць лінійних операторів дійсного векторного простору L можна звести до діагонального вигляду за допомогою переходу до нового базису? Знайти цей базис і відповідну йому діагональну матрицю:а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

128. Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду (зведення до головних осей), і записати цей канонічний вигляд:
$\varphi = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

2.4. Лінійна алгебра. Зразок оформлення розв'язання

1. Обчислити матрицю, обернену до даної (за допомогою елементарних перетворень або алгебраїчних доповнень):

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1 спосіб (за допомогою елементарних перетворень)

$$A\,|\,E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 5 & -2 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 & -1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6}\end{array}\right)=E\,|\,A^{-1}.$$

Отже, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6}\\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ -5 & 2 & -1\end{pmatrix}.$

2 спосіб (за допомогою алгебраїчних доповнень)

$|A|=-6$, обернена матриця A^{-1} існує. Обчислимо її за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-2+3=1;$ $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(4-1)=-3;$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6-1=5;$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(6-2)=-4;$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0;$ $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-(3-1)=-2;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1-2=-1;$ $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-1+4)=-3;$ $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1.$

Отже, $A^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ -3 & 0 & -3\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ -5 & 2 & -1\end{pmatrix}.$

2. Використовуючи метод Гаусса, дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності знайти розв'язок (загальний розв'язок):

а) $$\begin{cases}x_1+x_2-6x_3-4x_4=6,\\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2,\\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6,\\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7.\end{cases}$$

Розв'язання.

Випишемо розширену матрицю цієї системи й елементарними перетвореннями рядків зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & -21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A) = r(B) = 4 = n$, то система сумісна, визначена, тобто має єдиний розв'язок. Знайдемо його з відповідної східчастої системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 6x_3 + 6x_4 = -7, \\ 2x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = \dfrac{1}{3}, \\ x_4 = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Отже, $\vec{x} = \left(0; 2; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$.

$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання.

Випишемо розширену матрицю цієї системи і елементарними перетвореннями рядків зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A) = r(B) = r = 2$, то система сумісна, а, враховуючи, що $r < n$ $(n = 4)$, невизначена, тобто має безліч роз'язків. Запишемо формули її загального роз'язку.

Відповідна східчаста система має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо x_2, підставляємо в перше рівняння і визначаємо x_1.

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4, \\ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4. \end{cases}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -25; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 1 \\ 11 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -75; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 25; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & -4 & 11 \end{vmatrix} = -50;$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 2. \end{cases}$$

4. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо задану систему рівнянь у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком рівняння $A\vec{x} = \vec{b}$ є вектор $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Знайдемо A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\vec{x} = (1;-2;3)$.

5. Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Дане рівняння має вигляд: $AXB = C$. Домножимо обидві частини рівняння зліва на матрицю A^{-1} і справа на матрицю B^{-1}:

$$AXB = C \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Обернені матриці шукаємо за формулою:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-19 & -22\\ -43 & -50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -6\\ -7 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком заданого рівняння є матриця $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

6. З'ясувати, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:

$$\vec{a_1}=(1,-2,-3),\ \vec{a_2}=(2,3,4),\ \vec{a_3}=(3,5,7).$$

Розв'язання.

Система векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли існують числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, не всі рівні нулю, такі, що:

$$\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\lambda_3\vec{a_3}=\vec{0}, \qquad (*)$$

тобто коли система лінійних рівнянь (*) відносно невідомих $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ має ненульові розв'язки. Запишемо систему (*) в загальній формі:

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ -2\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3=0,\\ -3\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3=0.\end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 5\\ -3 & 4 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 11\\ 0 & 10 & 16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 11\\ 0 & 5 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 35 & 55\\ 0 & 35 & 56\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 11\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Система лінійних однорідних рівнянь має лише нульовий розв'язок, тому система векторів $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ лінійно незалежна.

7. Чи є кільцем (полем) множина всіх чисел виду: $a+b\sqrt[3]{3}$, де $a,b\in\mathbb{Q}$?

Розв'язання.

Перевіримо, чи задано операції додавання і множення у множині:

$$M=\{a+b\sqrt[3]{3}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}.$$

$$(a+b\sqrt[3]{3})+(c+d\sqrt[3]{3})=(a+c)+(b+d)\sqrt[3]{3}\in M;$$

$$(a+b\sqrt[3]{3})\cdot(c+d\sqrt[3]{3})=ac+(ad+bc)\sqrt[3]{3}+bd\sqrt[3]{9}\notin M.$$

Отже, операцію додавання задано, а операцію множення не задано, тому задана множина кільце і поле не утворює.

8. Довести, що $\forall n\in\mathbb{N}$ виконується рівність:

$$1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Розв'язання.

Доводимо методом математичної індукції.

1. При n=1 рівність правильна, тобто 1=1.

2. Припустимо, що рівність має місце для n=k, тобто

$$1^3+2^3+...+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

3. Виходячи з припущення, доведемо, що рівність виконується і для n=k+1, тобто

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3=\left(1^3+2^3+...+k^3\right)+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+$$

$$+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+(k+1)\right)=(k+1)^2\,\frac{(k+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Отже, рівність виконується $\forall n\in\mathbb{N}$.

9. Довести, що $\forall n\in\mathbb{N}\quad 5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\,\vdots\,19$.

Розв'язання.

Доведемо це твердження, використовуючи основну форму принципу математичної індукції.

1. При $n=1$ твердження правильне: $19\,\vdots\,19$.
2. Припустимо, що твердження правильне при $n=k$, тобто

$$5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1}\,\vdots\,19.$$

3. Доведемо, що твердження правильне при $n=k+1$, тобто

$$5\cdot 2^{3(k+1)-2}+3^{3(k+1)-1}\,\vdots\,19.$$

$$5\cdot 2^{3(k+1)-2}+3^{3(k+1)-1}=5\cdot 2^{3k+3-2}+3^{3k+3-1}=5\cdot 2^{3k-2}\cdot 2^3+3^{3k-1}\cdot 3^3=$$

$$=5\cdot 2^{3k-2}\cdot 8+3^{3k-1}\cdot 27=8\cdot(5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1})+19\cdot 3^{3k-1}.$$

Вираз в дужках ділиться на 19 за припущенням, другий доданок має множник 19, тому вся сума ділиться на 19, що й потрібно було довести.

10. Обчислити: $(-2+i\sqrt{12})^{1980}$.

Розв'язання.

$$(-2+i\sqrt{12})^{1980}=\left(4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{1980}=$$

$$=4^{1980}\left(\cos 1320\pi+i\sin 1320\pi\right)=4^{1980}\left(\cos 0+i\sin 0\right)=4^{1980}.$$

11. Обчислити: $\sqrt{-15+8i}$.

Розв'язання.

Скористаємось формулами:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),\quad b>0,$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),\quad b<0.$$

Тоді $\sqrt{-15+8i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{225+64}-15}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{225+64}+15}{2}}\right)=\pm(1+4i)$.

12. Обчислити: $\sqrt[5]{\frac{-2i}{1-i\sqrt{3}}}$.

Розв'язання.

$$\sqrt[5]{\frac{-2i}{1-i\sqrt{3}}}=\sqrt[5]{\frac{-2i(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}}=\sqrt[5]{\frac{2\sqrt{3}-2i}{4}}=\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}=$$

$$=\sqrt[5]{\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}}=\cos\left(\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{5}\right)=$$

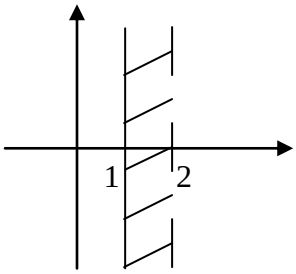
$$=\cos\left(\frac{11\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}\right),\quad k=0,1,2,3,4.$$

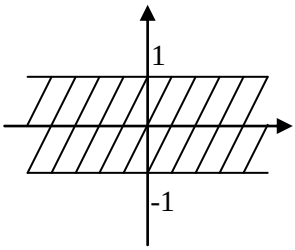
13. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z, які задовольняють умови:

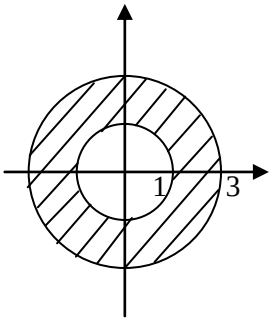
а) $1\le \operatorname{Re} z<2$; б) $|\operatorname{Im} z|<1$; в) $1\le|z|\le 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}>1$.

Розв'язання.

а) $1 \le \operatorname{Re} z < 2$; б) $|\operatorname{Im} z| \le 1$; в) $1 \le |z| \le 3$;



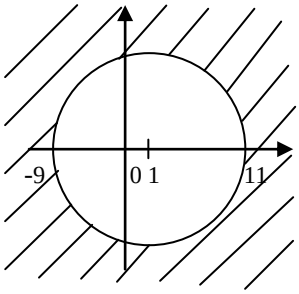




г) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} \ge 1$.

Введемо заміну $|z-1| = x$; отримаємо систему:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x+4}{3x-2} \le \dfrac{1}{2}, \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \ge 10 \text{ , тобто } |z-1| \ge 10.$$



14. Розв'язати рівняння в полі комплексних чисел: $|z| + z = 2 + i$.

Розв'язання.

Нехай $z = x + iy$; тоді $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Підставимо в рівняння:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i.$$

Звідси:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + y^2} = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 2 - x, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отже, $z = \dfrac{3}{4} + i$.

15. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1)$, $\vec{a}_3 = (3,2,1)$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x} = (1,7,-1)$ у цьому базисі.

Розв'язання.

Оскільки розглядуваний простір має розмірність 3 (це видно з кількості координат у заданих векторах), то достатньо довести, що система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежна. Для цього треба показати, що ранг матриці, складеної з координат цих векторів, дорівнює 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ знаходимо з рівності:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3.$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 7, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 4, \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

Отже, координатний рядок вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $[3,4,-2]$.

16. Довести, що кожна з двох заданих систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між координатами того самого довільно вибраного вектора в цих двох базисах, якщо:

$\vec{e}_1 = (1,1,1)$, $\vec{e}_2 = (1,-1,2)$, $\vec{e}_3 = (1,3,-1)$; $\vec{e}_1' = (1,-1,1)$, $\vec{e}_2' = (1,2,-1)$, $\vec{e}_3' = (2,2,-1)$.

Розв'язання.

Те, що кожна з двох заданих систем векторів є базисом, доводиться аналогічно, як і в попередньому завданні. Знайдемо зв'язок між координатами того самого довільно вибраного вектора $\vec{a}$ в цих двох базисах.

Якщо вектор $\vec{a}$ в базисі B має координати $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а в базисі B' – координати $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$, то:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']T,$$

де T – матриця переходу від базису B до базису B', яка визначається за формулою:

$$T = B_0 A_0^{-1},$$

де A_0 і B_0 – матриці, складені із координат векторів базисів B і B' відповідно.

Знаходимо матрицю A_0^{-1}:

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді,

$$T = B_0 A_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -8 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']T = [\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]T^{-1} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} \alpha_1' = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \\ \alpha_2' = 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3, \\ \alpha_3' = -4\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3. \end{cases}$$

17. Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину векторних підпросторів U і V, заданих як лінійні оболонки векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_l$ відповідно:

$\vec{a}_1 = (1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,2,1)$, $\vec{a}_3 = (0,2,2)$; $\vec{b}_1 = (3,2,1)$, $\vec{b}_2 = (2,1,0)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1)$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку розмірності просторів U і V.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\dim U = 2$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\dim V = 2$.

Щоб знайти розмірність суми, складемо матрицю з базисних векторів простору U і простору V (ненульові рядки в східчастих матрицях) та обчислимо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $s = \dim(U + V) = 3$.

За теоремою про розмірність суми підпросторів:

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$

звідки,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V).$$

Отже, $d = \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$.

18. Ортогоналізувати систему векторів:

$$\vec{b}_1 = (-1,3,2,1),\ \vec{b}_2 = (0,0,5,5),\ \vec{b}_3 = (2,1,-1,1).$$

Розв'язання.

Перевіримо спочатку, чи є задана система векторів лінійно незалежною.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix};\quad rangA = 3.$$

Від системи векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ перейдемо до ортогональної системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Нехай $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 = (-1,3,2,1)$. Оскільки $(\vec{b}_3, \vec{b}_1) = 0$, то за вектор $\vec{a}_2$ візьмемо вектор $\vec{b}_3$: $\vec{a}_2 = (2,1,-1,1)$. Вектор $\vec{a}_3$ шукаємо у вигляді:

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \vec{b}_2.$$

λ_1, λ_2 шукаємо з умов $(\vec{a}_3, \vec{a}_1) = 0, (\vec{a}_3, \vec{a}_2) = 0$.

$$\lambda_1 = -\frac{(\vec{a}_1, \vec{b}_2)}{(\vec{a}_1, \vec{a}_1)} = -\frac{15}{15} = -1; \qquad \lambda_2 = -\frac{(\vec{a}_2, \vec{b}_2)}{(\vec{a}_2, \vec{a}_2)} = -\frac{0}{7} = 0.$$

$$\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 + \vec{b}_2 = -(-1,3,2,1) + (0,0,5,5) = (1,-3,3,4).$$

Отже, $\vec{a}_1 = (-1,3,2,1)$, $\vec{a}_2 = (2,1,-1,1)$, $\vec{a}_3 = (1,-3,3,4)$ – шукана ортогональна система векторів.

19. Перевірити, чи вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні, і коли так, то доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, в якому вони розглядаються, якщо: $\vec{a}_1 = (6,1,-5,2)$, $\vec{a}_2 = (2,4,2,-3)$.

Розв'язання.

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні.

Знайдемо тепер такий вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4$, що:

$$(\vec{a}_1, \vec{x}) = (\vec{a}_2, \vec{x}) = 0.$$

Дістанемо таку систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи:

$$\vec{x}^{(1)} = (1,-1,1,0),\ \vec{x}^{(2)} = (-\frac{1}{2},1,0,1) \quad \text{або}$$

$$\vec{x}^{(1)} = (1,-1,1,0),\ \vec{x}^{(2)} = (-1,2,0,2).$$

Вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ ортогональні до векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ (їх знайдено з цієї умови). Але вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ не ортогональні, бо $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = -3 \neq 0$. Тому систему векторів $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ потрібно ортогоналізувати.

Відповідно до процесу ортогоналізації маємо $\vec{c}_1 = \vec{x}^{(1)} = (1,-1,1,0)$, $\vec{c}_2 = \lambda\vec{c}_1 + \vec{x}^{(2)}$, де $\lambda = -\frac{(\vec{c}_1, \vec{x}^{(2)})}{(\vec{c}_1, \vec{c}_1)} = -\frac{-3}{3} = 1$. Тоді $\vec{c}_2 = \vec{c}_1 + \vec{x}^{(2)} = (0,1,1,2)$.

Отже, система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2$ є ортогональним базисом простору E_4.

20. Знайти базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$ підпростору U, якщо U є лінійною оболонкою векторів:

$$\vec{a}_1 = (1,1,0,-2),\ \vec{a}_2 = (2,1,-1,1),\ \vec{a}_3 = (3,2,-1,-1).$$

Розв'язання.

Для того, щоб вектор був ортогональним до підпростору U, достатньо, щоб він був ортогональний кожному вектору деякого базису цього підпростору. Знайдемо спочатку базис простору U.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad rangA = 2.$$

Базис простору U складається з 2-х векторів, і за базисні вектори можна взяти, наприклад, вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Нехай $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – довільний вектор з ортогонального доповнення $U^{\perp}$ підпростору U. Тоді, згідно з сформульованим твердженням,

$$(\vec{x}, \vec{a}_1) = (\vec{x}, \vec{a}_2) = 0.$$

Ці рівності рівносильні такій системі лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої $\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4, \\ x_2 = -x_3 + 5x_4. \end{cases}$

Фундаментальна система розв'язків:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	-1	1	0
-3	5	0	1

тобто, $\vec{f}_1 = (1,-1,1,0)$, $\vec{f}_2 = (-3,5,0,1)$.

Система векторів $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ лінійно незалежна, і, крім того, кожен вектор з $U^{\perp}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{f}_1, \vec{f}_2$. Отже, $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ – базис $U^{\perp}$.

21. Знайти ортогональну проекцію $\vec{x}_U$ й ортогональну складову $\vec{x}_{U^{\perp}}$ вектора $\vec{x}$ на лінійний підпростір U, якщо $\vec{x} = (4,-1,-3,4)$, U є лінійною оболонкою векторів:

$$\vec{a}_1 = (1,1,1,1),\ \vec{a}_2 = (1,2,2,-1),\ \vec{a}_3 = (1,0,0,3).$$

Розв'язання.

Для довільного вектора $\vec{x} \in E_n$ існує єдине зображення $\vec{x} = \vec{x}_U + \vec{x}_{U^\perp}$, де вектор $\vec{x}_U$ – ортогональна проекція вектора $\vec{x}$ на підпростір U, $\vec{x}_{U^\perp}$ – ортогональна складова вектора $\vec{x}$, або проектуючий вектор.

Знайдемо спочатку базис простору U.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad rangA = 2.$$

За базис U можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Оскільки $\vec{x}_U \in U$, то цей вектор можна виразити через базисні вектори:

$$\vec{x}_U = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 .$$

Тоді,

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \vec{x}_{U^\perp} .$$

Домножимо останню рівність скалярно на $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ та врахуємо те, що $(\vec{x}_{U^\perp}, \vec{a}_1) = (\vec{x}_{U^\perp}, \vec{a}_2) = 0$:

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{a}_1) = \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{a}_1), \\ (\vec{x}, \vec{a}_2) = \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{a}_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 4, \\ 4\alpha_1 + 10\alpha_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3, \\ \alpha_2 = -2. \end{cases}$$

Отже, $\vec{x}_U = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 = (1,-1,-1,5)$, $\vec{x}_{U^\perp} = \vec{x} - \vec{x}_U = (3,0,-2,-1)$.

22. Довести, що існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно, і знайти матрицю A цього оператора в тому самому базисі, в якому задано координати всіх векторів, якщо:

$$\vec{a}_1 = (2,3,5), \vec{b}_1 = (1,1,1), \vec{a}_2 = (0,1,2), \vec{b}_2 = (1,1,-1), \ \vec{a}_3 = (1,0,0), \vec{b}_3 = (2,1,2).$$

Розв'язання.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є базисом простору V_3, оскільки вона, як легко перевірити, лінійно незалежна.

Використаємо теорему:

Яка б не була упорядкована система з n векторів простору L_n

$$\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n, \tag{1}$$

існує і притому тільки один, лінійний оператор φ простору L_n такий, що вектори системи (1) є образами векторів базису $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ при дії цього оператора:

$$\vec{c}_i = \vec{e}_i \varphi, \qquad i = 1,2,...,n .$$

Отже, існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно. Знайдемо матрицю A цього оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

$\vec{a}_1 A = \vec{b}_1 \Rightarrow (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3)A = 2\vec{e}_1 A + 3\vec{e}_2 A + 5\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3;$

$\vec{a}_2 A = \vec{b}_2 \Rightarrow (0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)A = \vec{e}_2 A + 2\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3;$

$\vec{a}_3 A = \vec{b}_3 \Rightarrow (1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3)A = \vec{e}_1 A = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$

Отримали систему:

$$\begin{cases} 2\vec{e}_1 A + 3\vec{e}_2 A + 5\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{e}_2 A + 2\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ \vec{e}_1 A = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \end{cases}$$

яку можна записати у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 A \\ \vec{e}_2 A \\ \vec{e}_3 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через L і M матриці, рядками яких є координатні рядки векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$L=\begin{pmatrix}2&3&5\\0&1&2\\1&0&0\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

Тоді система має вигляд:

$$L\begin{pmatrix}\vec{e}_1A\\\vec{e}_2A\\\vec{e}_3A\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix},\qquad \text{звідки}\qquad \begin{pmatrix}\vec{e}_1A\\\vec{e}_2A\\\vec{e}_3A\end{pmatrix}=L^{-1}M\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{pmatrix}.$$

Отже, $A=L^{-1}M=\begin{pmatrix}2&1&2\\-11&-7&-1\\6&4&0\end{pmatrix}.$

23. Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$ має матрицю:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A' цього самого оператора в базисі:

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4.$$

Розв'язання.

$A'=TAT^{-1}$, де T – матриця переходу від базису B до заданого базису $\vec{e}_1,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\ \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4$.

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю T^{-1}.

$$T|E=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\text{від}\\\text{кожного}\\\text{рядка}\\\text{віднімемо}\\\text{попередній}}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right)=E|T^{-1}.$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix};$$

$$TA=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\4&2&-1&3\\6&7&2&4\\7&9&3&7\end{pmatrix};$$

$$A'=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\4&2&-1&3\\6&7&2&4\\7&9&3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1&1\\2&3&-4&3\\-1&5&-2&4\\-2&6&-4&7\end{pmatrix}.$$

24. Нехай лінійний оператор A в базисі $\vec{a}_1=(-3,-1), \vec{a}_2=(7,2)$ має матрицю $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1=(3,2),\ \vec{b}_2=(4,3)$ має матрицю $B=\begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -21 & 15 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю X лінійних операторів AB і BA в базисі, в якому задано координати всіх векторів.

Розв'язання.

Знайдемо матрицю A' оператора A в базисі $\vec{e}$ і матрицю B' оператора B в базисі $\vec{e}$.

$A'=T_1AT_1^{-1}$, T_1 – матриця переходу від базису $\vec{a}$ до базису $\vec{e}$;

$B'=T_2BT_2^{-1}$, T_2 – матриця переходу від базису $\vec{b}$ до базису $\vec{e}$.

Якщо A_0, B_0 – матриці, складені з координатних рядків векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ відповідно, то:

$$\vec{a}=A_0\vec{e},\quad \vec{b}=B_0\vec{e},$$

звідки,

$$\vec{e}=A_0^{-1}\vec{a},\quad \vec{e}=B_0^{-1}\vec{b},$$

тобто, $T_1=A_0^{-1}$ – матриця переходу від базису $\vec{a}$ до базису $\vec{e}$;

$T_2=B_0^{-1}$ – матриця переходу від базису $\vec{b}$ до базису $\vec{e}$.

$$A_0=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix},\ B_0=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T_1=A_0^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix},\quad T_2=B_0^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A'=T_1AT_1^{-1}=A_0^{-1}AA_0=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 31 & 10 \end{pmatrix},$$

$$B'=T_2BT_2^{-1}=B_0^{-1}BB_0=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -21 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця оператора AB в базисі $\vec{e}$:

$$X=A'B'=\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 31 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матриця оператора BA в базисі $\vec{e}$:

$$X=B'A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 31 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 37 & 12 \end{pmatrix}.$$

25. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ дійсного векторного простору в деякому базисі задається матрицею:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звести матрицю A (якщо це можливо) до діагонального вигляду.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda)+18(1-\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

має корені $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$. Отже, власних значень є три, але <u>різних</u> власних значень є два. Знайдемо число k лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda=1$ кратності 2.

$$A^T-1\cdot E=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r=1, n=3,$ тому $k=n-r=3-1=2$ (2 – кратність кореня $\lambda=1$). Тому матриця цього оператора зводиться до діагонального вигляду, а саме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо базис, у якому матриця оператора має знайдений діагональний вигляд, тобто знайдемо власні вектори оператора.

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1-x_2-x_3=0; \quad x_1=x_2+x_3;$$

$$\vec{f}_1=(1,1,0), \quad \vec{f}_2=(1,0,1)$$

$$\lambda_3=-2 \qquad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_2=2x_1, \\ x_3=0, \end{cases} \qquad \vec{f}_3=(1,2,0).$$

Отже, шуканий базис: $\vec{f}_1=(1,1,0),\ \vec{f}_2=(1,0,1),\ \vec{f}_3=(1,2,0)$.

26. Звести квадратичну форму $\varphi=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$ до канонічного вигляду ортогональним перетворенням і записати формули перетворення.

Розв'язання.

Матрицею цієї форми є $\quad A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

Треба знайти ортогональну матрицю Q, що трансформує матрицю A в діагональну A' (тобто таку, що $A'=Q^{-1}AQ$). Для цього слід знайти власні значення $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ і повну ортонормовану систему власних векторів матриці A.

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda)-4(5-\lambda)-4(7-\lambda)=$$

$$=(6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda)-4(12-2\lambda)=(6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda)-8(6-\lambda)=$$

$$=(6-\lambda)((5-\lambda)(7-\lambda)-8)=(6-\lambda)(35-12\lambda+\lambda^2-8)=$$

$$=(6-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+27)=-(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)=0;$$

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=9.$$

$$A'=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1=3$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1=-2x_3, \\ x_2=-2x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_1=(2,2,-1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$: $\qquad \vec{e}_1'=\dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right).$

Для $\lambda_2=6$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_2 = (-1,2,2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$: $\quad \vec{e}_2' = \dfrac{\vec{f}_2}{\| \vec{f}_2 \|} = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right).$

Для $\lambda_3 = 9$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_3 = (2,-1,2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_3$: $\quad \vec{e}_3' = \dfrac{\vec{f}_3}{\| \vec{f}_3 \|} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right).$

Вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ утворюють повну ортонормовану систему власних векторів матриці A. Отже, шукана матриця має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

а відповідним перетворенням є:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

Внаслідок такого перетворення дістанемо канонічну форму:

$$\varphi = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

2.5. Лінійна алгебра. Рекомендована література

Основна:

1. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч. К., “Вища школа”, 1974. Ч.1. – 464 с.
2. Комарницька Леся. Лінійна алгебра: тексти лекцій [для студентів напряму підготовки 6.040201 «Математика»]. Частина 1. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2012. – 126 с.
3. Комарницька Леся. Лінійна алгебра: тексти лекцій [для студентів напряму підготовки 6.040201 «Математика»]. Частина 2. – Дрогобич: Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2015. – 100 с.
4. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.1. К., “Вища школа”, 1983. – 232 с.

Додаткова:

5. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М., “Высшая школа”, 1979. – 559 с.
6. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. К., “Вища школа”, 1969. – 540 с.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., “Наука”, 1971. – 432 с.
8. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М., “Наука”, 1984. – 416 с.
9. Калужнін Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.О. Лінійні простори. К., “Вища школа”, 1971. – 344 с.

10. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. К., “Вища школа”, 1969. – 540 с.
11. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел, ч.1. М., “Просвещение”, 1974. – 383 с.; ч.2. М., “Просвещение”, 1978. – 448 с.
12. Завало С.Т. Курс алгебри. К., “Вища школа”, 1985. – 503 с.
13. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М., “Наука”, 1970. – 392 с.
14. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., “Наука”, 1974. – 384 с.
15. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри. К., “Вища школа”, 1971. – 316 с.

2.6. Алгебра і теорія чисел. Основні факти

1. Теорія подільності в кільці цілих чисел.
2. Групи. Кільця.
3. Теорія конгруенцій.
4. Кільце многочленів від однієї змінної.
5. Многочлени від кількох змінних.
6. Многочлени від однієї змінної над числовими полями.
7. Алгебраїчні розширення полів.

2.7. Алгебра і теорія чисел. Зразки завдань

1. Відношення подільності в кільці цілих чисел, його властивості.
2. Теорема про ділення з остачею в кільці Z.
3. НСД двох чисел. Алгоритм Евкліда. Властивості НСД двох чисел. НСД кількох чисел.
4. Взаємно прості числа. Властивості.
5. НСК двох і більше чисел. Властивості.
6. Системні числа. Операції над ними. Переведення цілих чисел з однієї позиційної системи числення в іншу.
7. Прості і складені числа. Нескінченність множини простих чисел. Решето Ератосфена.
8. Розклад цілих чисел на прості множники і його єдиність. Канонічний розклад складеного числа. НСД і НСК складених чисел.
9. Числові функції. Число і сума натуральних дільників.
10. Ланцюгові дроби. Запис чисел у вигляді ланцюгових дробів.
11. Підхідні дроби та їхні властивості.
12. Розв’язування в цілих числах лінійного рівняння з двома невідомими.
13. Конгруенції в кільці Z. Властивості конгруенцій.
14. Класи лишків за даним модулем. Фактор-кільце класів лишків за даним модулем.
15. Повна і зведена системи лишків. Мультиплікативна група класів лишків, взаємно простих з модулем.
16. Функція Ейлера, її властивості та обчислення.
17. Теореми Ейлера і Ферма. Наслідок.
18. Лінійні конгруенції з одним невідомим.
19. Способи розв’язування конгруенцій 1-го степеня з одним невідомим.
20. Конгруенції вищих степенів. Число розв’язків конгруенції n-го степеня.
21. Числа і класи чисел, які належать до даного показника. Властивості показників за модулем. Первісні корені.
22. Індекси за простим модулем, властивості. Двочленні конгруенції за простим модулем; таблиці індексів та їх застосування.
23. Квадратичні лишки і нелишки. Критерій Ейлера. Символ Лежандра.
24. Деякі арифметичні застосування теорії конгруенцій (виведення ознак подільності, визначення довжини періоду при перетворенні звичайного дробу в десятковий).
25. Розклад групи за підгрупою. Нормальні дільники групи. Приклади.
26. Фактор-групи. Приклади. Властивості фактор-груп.
27. Гомоморфізми груп. Теорема про гомоморфізми груп.
28. Кільце. Область цілісності. Поле часток. Характеристика кільця.
29. Ідеали кільця та операції над ними. Конгруенції і класи лишків за ідеалом. Фактор-кільце.
30. Гомоморфізми та ізоморфізми кілець. Теорема про гомоморфізми кілець.
31. Кільця головних ідеалів. Евклідові кільця.
32. Кільце многочленів від однієї змінної над областю цілісності.
33. Корені многочлена. Теорема Безу, наслідок. Теорема про можливе число коренів многочлена. Алгебраїчна і функціональна рівності многочленів.
34. Многочлени над полем. Теорема про ділення з остачею. Методи ділення многочленів. Приклади.
35. Ділення многочлена на двочлен x-a. Схема Горнера. Розклад многочлена за степенями двочлена x-a. Формула Тейлора.
36. Властивості подільності многочленів. НСД двох многочленів. Алгоритм Евкліда. НСК двох многочленів.

37. Звідні та незвідні многочлени над полем. Розклад многочленів в добуток незвідних множників і його єдиність. Канонічний розклад многочлена.
38. Формальна похідна многочлена. Виділення кратних множників многочлена.
39. Кратні корені многочлена. Теорема Вієта.
40. Кільце многочленів від кількох змінних. Степінь многочлена. Лексикографічне упорядкування членів многочлена. Лема про вищий член добутку двох многочленів.
41. Симетричні многочлени. Основна теорема про симетричні многочлени. Наслідок.
42. Результант двох многочленів (різні означення). Властивості.
43. Виключення невідомих із системи двох рівнянь з двома невідомими.
44. Многочлени над полем комплексних чисел. Теорема про алгебраїчну замкненість поля комплексних чисел. Наслідки.
45. Многочлени над полем дійсних чисел. Теорема про спряженість уявних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами. Наслідки.
46. Розв'язування рівнянь 3-го степеня. Формула Кардано.
47. Дослідження коренів кубічного рівняння з дійсними коефіцієнтами.
48. Розв'язування рівнянь 4-го степеня. Метод Феррарі.
49. Цілі і раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами.
50. Звідність і незвідність многочленів в полі раціональних чисел. Критерій незвідності Ейзенштейна.
51. Просте алгебраїчне розширення поля. Алгебраїчні і трансцендентні числа.
52. Знищення алгебраїчної ірраціональності в знаменнику дробу. Теорема про будову простого алгебраїчного розширення.
53. Скінченні розширення полів. Складне алгебраїчне розширення поля. Поле алгебраїчних чисел та його алгебраїчна замкненість.
54. Поняття розв'язності рівнянь в радикалах. Умови розв'язності рівнянь 3-го степеня в квадратних радикалах. Приклади геометричних задач, що зводяться до рівнянь, які не розв'язуються в квадратних радикалах.
55. При діленні цілого числа a на ціле число b дістають неповну частку q і остачу r. Знайти b і q, якщо $a = 298, r = 10$.
56. При діленні цілого числа a на ціле число b утворюється неповна частка q і остача r. Знайти b і r, якщо $a = 441, q = 25$.
57. Знайти загальний вид усіх тих цілих чисел, які:
а) діляться на 2; б) діляться на 8; в) не діляться на 2.
58. Довести, що: а) сума квадратів двох послідовних цілих чисел при діленні на 4 дає остачу 1; б) якщо чисельник дробу є різниця квадратів двох непарних цілих чисел, а знаменник – сума квадратів цих чисел, то такий дріб можна завжди скоротити на 2, але не на 4.
59. Довести, що для довільного цілого числа n $(n^3 - n) \vdots 6$.
60. Знайти найбільший спільний дільник чисел: а) 2585 і 7975; б) 2091 і 1681.
61. Знайти найбільший спільний дільник таких чисел: а) 3059, 2737 і 943; б) 2737, 9163 і 9639.
62. Знайти найменше спільне кратне чисел: а) 187 і 533; б) 252 і 468.
63. Знайти найменше спільне кратне чисел 91, 252 і 462.
64. Знайти лінійне зображення найбільшого спільного дільника чисел 21 і 51.
65. Знайти натуральні числа a і b, якщо $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{11}{7}, \\ (a,b) = 45. \end{cases}$.
66. Записати в десятковій системі числення такі числа римської нумерації:а) CLIX; б) MCCV; в) MDCCCLXXIV.
67. Обчислити: а) $3604_7 \cdot 423_7$; б) $11011{,}101_2 + 101{,}011_2$; в) $26153_7 : 326_7$.
68. Записати в десятковій системі числення такі числа: а) 11001101_2; б) 5071_8; в) 33311_7.
69. Перевести з однієї системи в іншу: а) $33311_7 \to x_{12}$; б) $21066754_8 \to x_2$; в) $2042 \to x_2, y_3, z_5$.
70. Знайти x, якщо $203_x = 53_{10}$.
71. Визначити основу системи числення, в якій виконується рівність: $35 + 40 = 115$.
72. Знайти всі прості числа, які містяться між числами 1 і 100.
73. Знайти канонічний розклад числа n, якщо: а) n=160; б) n=494; в) n=1009; г) n=1769.
74. Знайти канонічний розклад числа a, якщо $a = 7^8 + 7^4 - 6$.
75. За допомогою канонічних розкладів знайти найбільший спільний дільник таких чисел: 31605, 13524, 12915 і 11067.

76. За допомогою канонічних розкладів знайти найменше спільне кратне чисел: 356, 1068 і 1424.
77. Знайти число і суму всіх натуральних дільників таких чисел: а) 375; б) 720.
78. Знайти всі натуральні дільники чисел: а) 360; б) 375.
79. Знайти натуральне число n, якщо n має тільки два простих дільники, $\tau(n)=12$, $\sigma(n)=465$.
80. Знайти: а) $[\lg 128]$; б) $\left[\frac{1+\sqrt{52}}{2}\right]$; в) $\left\{2{,}1+\cos\frac{\pi}{3}\right\}$; г) $\left\{1{,}5-tg\frac{\pi}{4}\right\}$.
81. Розкласти в ланцюгові дроби і обчислити їхні підхідні дроби для раціональних чисел: а) $\frac{36}{19}$; б) $-1{,}425$; в) $-5\frac{28}{57}$.
82. За допомогою розкладу в ланцюгові дроби скоротити дроби: а) $\frac{2227}{9911}$; б) $\frac{1857}{9153}$; в) $\frac{6821}{2147}$.
83. Знайти звичайні нескоротні дроби, що відповідають ланцюговим дробам: а) $[2;1,19,1,3]$; б) $[1;1,2,3,4]$; в) $[-2;1,3,1,1,5]$.
84. За допомогою підхідних дробів розв'язати в цілих числах рівняння: $119x-68y=34$.
85. Перевірити, які з аксіом групи виконуються в алгебрі:а) ($\mathbb{Q}_+$; :) – усіх додатних раціональних чисел з операцією ділення;б) ($\mathbb{Q}_+$; $\cdot$) – усіх додатних раціональних чисел з операцією множення.
86. Чи є групою відносно операції множення множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, де $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$?
87. У мультиплікативній групі всіх неособливих матриць другого порядку знайти порядок елемента: $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$.
88. У мультиплікативній групі всіх комплексних чисел, відмінних від нуля, знайти підгрупу, породжену елементом: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$.
89. Чи є нормальним дільником мультиплікативної групи всіх невироджених матриць другого порядку над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ множина всіх її матриць, визначник кожної з яких дорівнює 1?
90. Довести, що знакозмінна група 3-го степеня A_3 є нормальним дільником групи S_3.
91. Знайти фактор-групи: а) адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}$ за підгрупою чисел, кратних числу $n\in\mathbb{N}$; б) адитивної групи цілих чисел, що діляться на 3 за підгрупою чисел, які діляться на 24.
92. Побудувати фактор-групу $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}$ за її підгрупою $4\mathbb{Z}$ цілих чисел, які діляться на 4. Скласти таблицю Келі для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
93. Які з заданих числових множин утворюють кільце відносно операцій додавання і множення? У кільцях з одиницею знайти всі дільники одиниці. Визначити пари кілець, в яких перше є підкільцем другого: а) $m\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (множина чисел виду $a+b\sqrt{2}$, де $a, b\in m\mathbb{Z}$); б) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ (множина всіх чисел виду $a+b(i\sqrt{2})$, де $a, b\in\mathbb{Z}$); в) $m\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ (множина всіх чисел виду $a+b(i\sqrt{2})$, де $a, b\in m\mathbb{Z}$); г) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ (множина всіх чисел виду $a+b\sqrt[3]{2})$, де $a, b\in\mathbb{Q}$).
94. Які із заданих множин матриць утворюють кільце відносно операцій додавання і множення? Які з кілець комутативні? Які містять одиницю? Знайти дільники нуля і одиниці. а) $\left\{\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in Z\right\}$; б) $\left\{\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in 3Z\right\}$; в) $\left\{\begin{pmatrix}a&2b\\b&a\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in Q\right\}$..
95. Довести, що: $(-7+18\sqrt{3})\vdots(4-\sqrt{3})$, $(5+2\sqrt{3})\vdots(4-\sqrt{3})$, $13\vdots(4-\sqrt{3})$, $13\vdots(5-2\sqrt{3})$ в кільці $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.
96. Довести, що в області цілісності $K=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ елементи $25-17\sqrt{2}$ і $7-\sqrt{2}$ асоційовані.
97. Чи є ідеалами (лівим, правим, двостороннім):
а) множина KaK всіх елементів виду $x_1ay_1+x_2ay_2+\ldots x_nay_n$, де n – будь-яке натуральне число, x_i і y_i – будь-які елементи кільця K, a – довільний фіксований елемент цього кільця; б) множина $3\mathbb{Z}[i]$ в кільці $\mathbb{Z}[i]$; в) множина $\left\{\begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix}\middle|\, a\in Z\right\}$ в кільці $\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in Z\right\}$; г) множина $\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\middle|\, a,b\in Z\right\}$ в кільці $M(2,Z)$?

98. У кільці цілих чисел $\mathbb{Z}$ виконати такі дії над його ідеалами: а) $<4> + <10>$; б) $<4> \cap <10>$; в) $<4> \cdot <10>$; г) $<5> + <7>$; д) $<5> \cap <7>$; е) $<5> \cdot <7>$.

99. Довести, що ізоморфними між собою є такі кільця: а) $2Z[\sqrt{3}]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in 2Z\right\}$; б) $Q[i]$ і $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in Q\right\}$.

100. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне таких цілих гауссових чисел: $4+3i$ та $3+i$.

101. Серед чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ знайти всі пари різних чисел, конгруентних за модулем m, якщо: $a_1=135$, $a_2=106$, $a_3=181$, $a_4=225$, $a_5=167$, $a_6=452$, $m=15$.

102. Записати у вигляді конгруенцій такі умови: а) при діленні на 8 число 53 дає остачу 5; б) a^2-b^2 ділиться на $a-b$ ($a \neq b$); в) 20 є остача від ділення числа 389 на 41; г) n – непарне число; д) n має вид $5k+3$, $k\in\mathbb{Z}$; е) n має вид $-3+8k$, $k\in\mathbb{Z}$.

103. Довести, що: а) $(m-1)^2 \equiv 1 \pmod{m}$; б) $26^{30}-1\equiv 0 \pmod{5\cdot 7\cdot 11\cdot 31}$.

104. Довести, що: $7^{103}\not\equiv 3 \pmod{27}$.

105. Знайти остачу від ділення: а) $15^{231}+2$ на 16; б) $12^{1231}+14^{4324}$ на 13.

106. Довести, що $18a+5b \vdots 19$, якщо $11a+2b \vdots 19$.

107. Довести, що при будь-якому натуральному n $10^n+17\equiv 0 \pmod 3$.

108. Знайти повну систему найменших невід'ємних лишків за модулями: а) 4; б) 7.

109. Знайти зведену систему лишків за модулями: а) 4; б) 7.

110. Чи утворюють повну систему лишків за модулем m такі числа: а) 25, –9, –6, 420, –18, 30, 6, якщо $m=7$; б) 605, –189, 242, –311, 143, 40, –51, 194, якщо $m=8$?.

111. Чи утворюють зведену систему лишків за модулем m такі числа: а) 19, 35, 25, –19, якщо $m=12$; б) –181, 231, 413, –349, якщо $m=12$?.

112. Об'єднанням яких класів лишків є класи лишків $K_1^{(13)}, K_3^{(13)}, K_5^{(13)}, K_7^{(13)}$ за модулем 52?

113. Знайти функцію Ейлера для чисел: а) 200; б) 375.

114. Користуючись теоремою Ейлера, знайти остачу від ділення: а) 109^{345} на 14; б) 6^{76} на 26; в) 356^{273} на 39.

115. Користуючись малою теоремою Ферма, знайти остачу від ділення: а) 5008^{10000} на 5, 7, 11, 13; б) 20^{59} на 17; в) $15^{60}+20^{30}$ на 13.

116. Знайти дві останні цифри числа: а) 3^{219}; б) 17^{900}.

117. За способом спроб розв'язати такі конгруенції: а) $8x\equiv 3 \pmod 4$; б) $3x\equiv 22 \pmod 7$; в) $12x\equiv 1 \pmod 7$.

118. За штучним способом розв'язати такі конгруенції: а) $6x\equiv 11 \pmod{14}$; б) $11x\equiv -32 \pmod{27}$; в) $25x\equiv 1 \pmod{37}$.

119. За способом Ейлера розв'язати такі конгруенції:а) $29x\equiv 3 \pmod{12}$; б) $8x\equiv 17 \pmod{19}$; в) $24x\equiv 1 \pmod{15}$.

120. Застосовуючи ланцюгові дроби, розв'язати такі конгруенції: а) $32x\equiv 182 \pmod{119}$; б) $97x\equiv 53 \pmod{169}$; в) $69x\equiv 393 \pmod{201}$. Скільки точок з цілими координатами лежать на прямій $8x-13y+6=0$ між прямими $x= -100$ і $x=150$?

121. Знайти конгруенції того самого степеня із старшим коефіцієнтом 1, еквівалентні таким конгруенціям: а) $27x^3+14x^2-10x+13\equiv 0 \pmod{59}$; б) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\equiv 0 \pmod m$, $(a_0, m)=1$.

122. Звести задану конгруенцію до еквівалентної їй конгруенції, степінь якої менший за модуль: $3x^{14}+4x^{13}+3x^{12}+2x^{11}+x^9+2x^8+4x^7+x^6+3x^4+x^3+4x^2+2x\equiv 0 \pmod 5$.

123. Спростити задані конгруенції (понизити степені, зменшити коефіцієнти за абсолютною величиною, зробити так, щоб старший коефіцієнт дорівнював 1) і розв'язати способом підбору: а) $6x^4+17x^2-16\equiv 0 \pmod 3$; б) $x^5+2x^4-2x^3-2x^2+2x-1\equiv 0 \pmod 3$; в) $x^{13}-x^{11}+x^9-x^7+x^5+x^3+x+1\equiv 0 \pmod 7$.

124. Знайти порядок числа a за модулем m, якщо: а) $a=4$, $m=5$; б) $a=10$, $m=13$; в) $a=7$, $m=20$.

125. Розв'язати конгруенції, звівши їх до двочленних: а) $3x^2-x\equiv 0 \pmod 5$; б) $2x^2-4x-5\equiv 0 \pmod 7$; в) $3x^2+2x\equiv 1 \pmod 7$; г) $5x^2+7x+1\equiv 0 \pmod{13}$.

126. Знайти кількість розв'язків таких конгруенцій: а) $x^2\equiv 5 \pmod{73}$; б) $x^2\equiv 429 \pmod{563}$.

127. За допомогою конгруенцій розв'язати в цілих числах рівняння: $15x^2-7y-9=0$.

128. За допомогою індексів розв'язати конгруенції: а) $47x\equiv 23 \pmod{73}$; б) $125x\equiv 7 \pmod{79}$; в) $x^2\equiv 58 \pmod{61}$; г) $x^3\equiv 34 \pmod{41}$.

129. Користуючись ознаками подільності, встановити, чи ділиться число a на m, якщо: а) $a=24829$, $m=7$; б) $a=53746$, $m=11$; в) $a=973126$, $m=13$; г) $a=20794$, $m=37$.

130. Знайти довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу із знаменником: а) 19; б) 37; в) 33; г) 49.

131. Знайти кількість цифр до періоду і довжину періоду при перетворенні у десятковий дріб нескоротного звичайного дробу із знаменником: а) 220; б) 528.

132. При яких значеннях a, b і c многочлени $f(x)=ax^2(x+1)+b(x^2+1)(x-6)+cx(x^2+1)$ та $g(x)=x^2+5x+6$ з кільця Z[x] рівні між собою?

133. Чи є кільцем множина всіх многочленів з кільця Z[x] а) в яких змінна x має тільки парний степінь; б) в яких змінна x має тільки непарний степінь?.

134. Перевірити, чи ділиться $f(x)=(3x^2-2x-1)(10x^3+10x-20)+2x^4-2$ на $g(x)=5x^2-5$ у кільцях Z[x] і Q[x].

135. Знайти остачу від ділення: а) $f(x)=x^{10000}+x^{1000}+x^{100}+x^{10}+x-1$ на $g(x)=ix-1$ у кільці C[x]; б) $f(x)=x^{100}+x^{99}-2x^{98}-3x^3+2x+5$ на $g(x)=x^2+x-2$ у кільці Z[x].

136. Виконати ділення многочленів: а) $f(x)=10x^7-36x^6+13x^5+38x^4-6x^3+3x^2-20x-13$ на $g(x)=2x^2-4x-3$ у кільці R[x]; б) $f(x)=ix^4+(1+i)x+(1-i)$ та $g(x)=x^3+(1+i)$ у кільці C[x].

137. Виконати ділення многочленів $f(x)=10x^4-23x^3+26x^2-9x-2$ на $g(x)=2x-3$ у кільці Z[x].

138. Знайти частку і остачу від ділення $f(x)=(1+\sqrt{2})x^4+\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}x^2+1$ на $g(x)=x-1+\sqrt{2}$ у кільці R[x].

139. Розкласти многочлен $f(x)=2x^4+x^3+x^2+2$ за степенями двочлена $x-1$ у кільці Z[x].

140. Користуючись алгоритмом Евкліда, знайти НСД многочленів: а) $f(x)=x^3+x^2-4x-24$ та $g(x)=x^3+x^2-10x-6$ в кільці Q[x]; б) $f(x)=3x^4-3x^3+4x^2-x+1$ та $g(x)=2x^3-x^2+x+1$ в кільці Q[x].

141. Знайти НСК многочленів $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-5x-2$ та $g(x)=x^2-x+2$ в кільці Q[x].

142. Знайти НСД і НСК многочленів: а) $f(x)=x^4+2x^3-2x-1$ та $g(x)=(x+1)(x^2-x-2)$ з кільця Q[x]; б) $f(x)=(x+1)^2(x^2+1)(x^2-1)$ та $g(x)=(x-i)^2(x+1)$ з кільця C[x].

143. Знайти кратність кореня $x=3$ многочлена $f(x)=x^4-6x^3+10x^2-6x+9$ з кільця Q[x].

144. Відокремити кратні множники многочлена $f(x)=x^5-ix^4+5x^3-ix^2+8x+4i$.

145. Корені многочлена $f(x)=x^3+6x^2+5x+r$ утворюють арифметичну прогресію. Знайти цей многочлен і його корені.

146. Знайти канонічну форму многочлена $f(x,y)=(x-y)(y-z)(x-z)xyz$.

147. Упорядкувати лексикографічно і знайти вищий член многочлена $f(x,y,z)=(2x+3y)^2z-x(y+z-3xz)$ з кільця Z[x,y,z].

148. Розкласти на незвідні у полі Q множники многочлен: $f(a,b,c)=(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$.

149. Доповнити заданий многочлен найменшим числом нових членів так, щоб він став симетричним: $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+2x_1x_3+x_1x_2x_3$.

150. Виразити через елементарні симетричні многочлени такий многочлен: $f(x,y)=2x^4y-5x^2y+2xy^4-5xy^2$.

151. У множині дійсних чисел розв'язати систему рівнянь, використовуючи симетричні многочлени: $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$

152. Обчислити результант многочленів: $f(x)=x^3+2x-1,\ g(x)=x^2-2x-3$.

153. При якому значенні λ мають спільний корінь такі многочлени: $f(x)=x^2+\lambda$, $g(x)=x^3-3x^2+\lambda x-3$.

154. Розкласти многочлен $f(x)$ на незвідні над полем $\mathbb{C}$ множники: а) $f(x)=x^4-10x^2+169$; б) $f(x)=x^8-1$.

155. Знайти многочлен найменшого степеня, в якого число 2 є подвійним коренем, а $2i, 3+i, 3-i$ – простими коренями.

156. Знайти суму квадратів коренів многочлена $f(x)=x^3+2x^2+x-3$.

157. Розв'язати рівняння: а) $x^4-x^3+x^2+4x+10=0$, якщо $x_1=-1+i$; б) $x^4-10x^3+36x^2-58x+35=0$, якщо $x_1=2-i$.

158. Число $-3+i$ є коренем рівняння з дійсними коефіцієнтами $x^3+x^2+ax+b=0$. Знайти числа a і b та два інших корені рівняння.

159. Довести, що при дійсних a,b і c рівняння $x^8+a^2x^6+b^2x^4+c^2x^2=0$ не має дійсних коренів, відмінних від нуля.

160. Розкласти наступні многочлени на незвідні над полем $\mathbb{R}$ множники:
а) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$; б) $f(x)=x^4-2x^3+x^2+3$.

161. Обчислити дискримінант таких рівнянь: а) $x^3-4x+1=0$; б) $x^3-3ix^2+4=0$.

162. Розв'язати рівняння: а) $2x^3-3x^2+1=0$; б) $x^3-2x^2+x-3=0$.

163. При яких дійсних значеннях a рівняння $ax^3+(a-1)x+a-1=0$ має кратний корінь? Знайти його.

164. Розв'язати рівняння методом Феррарі: а) $x^4-6x^3+6x^2+27x-56=0$; б) $9x^4+6x^3-3x^2+4x-1=0$; в) $x^4-2x^3+x-2=0$; г) $x^4+6x^3+9x^2+12x+4=0$.

165. Розв'язати рівняння, знайшовши спочатку раціональні корені:
а) $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$; б) $x^4-x^3-22x^2+16x+96=0$;
в) $12x^3-x^2+2x-1=0$; г) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$.

166. Знайти раціональні корені рівняння: $\dfrac{16}{x^3+3x^2-x+5}-\dfrac{5}{x^3+3x^2-x+2}=1$.

167. Розкласти многочлен $f(x)=x^4+x^3-6x^2-7x-7$ на незвідні у полі $\mathbb{Q}$ множники.

168. Довести, що многочлен $f(x)=x^3-3x^2+1$ є незвідним у полі $\mathbb{Q}$.

169. Довести, що число $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ є алгебраїчним і знайти його мінімальний многочлен.

170. Позбавитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{1}{\omega}$, де $\omega^2+\omega-1=0$.

171. Позбавитися від ірраціональності в знаменнику дробу: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{5}}$.

2.8. Алгебра і теорія чисел. Зразок оформлення розв'язання

1. При діленні цілого числа a на ціле число b дістають неповну частку q і остачу r. Знайти b і q, якщо $a=521, r=-15$.

Розв'язання.

Знайдемо найбільше ціле число k, яке кратне b і не перевищує a. Тоді неповну частку q дістанемо як частку від ділення k на b, а остачу r знайдемо як різницю між a та k:
$k=510=(-15)\cdot(-34)$, звідки $q=-34$, $r=521-510=11$.

2. Знайти натуральні числа a і b, якщо $\begin{cases} (a,b)=26, \\ [a,b]=4914. \end{cases}$

Розв'язання.

Оскільки $(a,b)=26$, то існують такі натуральні числа a_1 і b_1, що $a=26a_1$, $b=26b_1$, причому $(a_1,b_1)=1$. За формулою знаходження НСК двох чисел $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$ отримаємо:

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)}=\frac{26a_1\cdot 26b_1}{26}=26a_1b_1.$$

Враховуючи другу умову заданої системи, отримаємо: $26a_1b_1=4914$, звідки $a_1b_1=189$.

Оскільки $(a_1,b_1)=1$, а $189=3^3\cdot 7$, то тут можливі такі випадки:

а) $a_1=1, b_1=189$ або навпаки; тоді $a=26a_1=26$, $b=26b_1=4914$ або $a=4914$, $b=26$;

б) $a_1=3^3, b_1=7$ або навпаки; тоді $a=702$, $b=182$ або $a=182$, $b=702$.

Отже, a і b дорівнюють відповідно 26 і 4914 або 702 і 182.

3. Використовуючи канонічні розклади, знайти НСД і НСК чисел 3780 і 4950.

Розв'язання.

Розкладемо кожне із цих чисел на прості множники:

3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

4950	2
2475	3
825	3
275	5
55	5
11	11
1	

Канонічні розклади даних чисел мають вигляд:

$$3780=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7,\quad 4950=2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11,$$

а узагальнені канонічні розклади:

$$3780=2^2\cdot 3^3\cdot 5^1\cdot 7^1\cdot 11^0,\quad 4950=2^1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^0\cdot 11^1.$$

Отже, отримаємо:

$$(3780,4950)=2^1\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^0\cdot 11^0=90,\quad [3780,4950]=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^1\cdot 11^1=207900.$$

4. Знайти остачу від ділення 232^{2009} на 63.

Розв'язання.

Дана задача еквівалентна наступній: знайти число r таке, що $232^{2009}\equiv r(\mathrm{mod}\,63)$, де $0\le r<63$. Оскільки $232\equiv 43(\mathrm{mod}\,63)$, то за властивостями конгруенцій, $232^{2009}\equiv 43^{2009}(\mathrm{mod}\,63)$, звідки $r\equiv 43^{2009}(\mathrm{mod}\,63)$.

Оскільки $(43,63)=1$, то, за теоремою Ейлера, $43^{\varphi(63)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,63)$. Враховуючи, що $\varphi(63)=\varphi(3^2\cdot 7)=3^2\cdot 7\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{7}\right)=36$, отримаємо: $43^{36}\equiv 1(\mathrm{mod}\,63)$.

Поділимо число 2009 на число $\varphi(63)=36$ з остачею: $2009=36\cdot 55+29$. Тоді

$$r\equiv 43^{2009}(\mathrm{mod}\,63)\equiv 43^{36\cdot 55+29}(\mathrm{mod}\,63)\equiv\left(43^{36}\right)^{55}\cdot 43^{29}(\mathrm{mod}\,63)\equiv 1\cdot 43^{29}(\mathrm{mod}\,63)\equiv 43^{29}(\mathrm{mod}\,63).$$

Враховуючи, що v, отримаємо:

$$r\equiv(-20)^{29}(\mathrm{mod}\,63)\equiv -20^{29}(\mathrm{mod}\,63)\equiv -\left(20^3\right)^9\cdot 20^2(\mathrm{mod}\,63)\equiv -(-1)\cdot 20^2(\mathrm{mod}\,63)\equiv 22(\mathrm{mod}\,63).$$

Отже, остача від ділення числа 232^{2009} на 63 дорівнює 22.

5. Штучним способом розв'язати конгруенцію: $31x\equiv 25(\mathrm{mod}\,41)$.

Розв'язання.

Додамо до правої частини конгруенції число 533, кратне модулю 41. Отримаємо рівносильну конгруенцію:

$$31x\equiv 25(\mathrm{mod}\,41)\quad\Leftrightarrow\quad 31x\equiv 25+533(\mathrm{mod}\,41)\quad\Leftrightarrow\quad 31x\equiv 558(\mathrm{mod}\,41).$$

Поділимо обидві частини останньої конгруенції на 31:

$$x\equiv 18(\mathrm{mod}\,41).$$

Отже, клас $K_{18}^{(41)}$ – розв'язок заданої конгруенції.

6. Знайти розклад на суміжні класи адитивної групи C комплексних чисел за її підгрупою $Z[i]$ цілих гаусових чисел.

Розв'язання.

Нехай $x+yi$ – довільний елемент із C, $x,y\in R$. Виділимо цілу частину чисел x і y: $x=[x]+\{x\}$, $y=[y]+\{y\}$. Розглянемо суміжний клас $x+yi+Z[i]$ елемента $x+yi$ за підгрупою $Z[i]$:

$$x+yi+Z[i]=([x]+\{x\})+([y]+\{y\})i+Z[i]=(\{x\}+\{y\}i)+([x]+[y]i)+Z[i]=$$
$$=(\{x\}+\{y\}i)+([x]+[y]i)+Z[i]=(\{x\}+\{y\}i)+Z[i],$$

оскільки $([x]+[y]i)\in Z[i]$.

Отже, кожний суміжний клас адитивної групи C за підгрупою $Z[i]$ складається з усіх таких чисел $x+yi\in C$, дробові частини чисел x і y яких однакові.

7. Визначити, чи є ідеалом множина

$$T=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 0\end{pmatrix} \middle|\, a,b\in Z\right\}$$

в кільці $M_2(Z)$ матриць 2-го порядку з цілими елементами.

Розв'язання.

Оскільки $\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}\in T$, то $T\neq\varnothing$. Використовуючи критерій підкільця, покажемо, що T – підкільце кільця $M_2(Z)$. Нехай $A_1=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ b_1 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} a_2 & 0\\ b_2 & 0\end{pmatrix}$, $a_1,b_1,a_2,b_2\in Z$, – довільні два елементи із T. Тоді:

1) $A_1+A_2=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ b_1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & 0\\ b_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0\\ b_1+b_2 & 0\end{pmatrix}\in T$, оскільки $a_1+a_2\in Z$, $b_1+b_2\in Z$;

2) $A_1-A_2=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ b_1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_2 & 0\\ b_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1-a_2 & 0\\ b_1-b_2 & 0\end{pmatrix}\in T$, оскільки $a_1-a_2\in Z$, $b_1-b_2\in Z$;

3) $A_1A_2=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ b_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0\\ b_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2 & 0\\ b_1a_2 & 0\end{pmatrix}\in T$, оскільки $a_1a_2\in Z$, $b_1a_2\in Z$.

Отже, T – підкільце кільця $M_2(Z)$.

Нехай тепер $A=\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$ – довільний елемент із T, $X=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ – довільний елемент із $M_2(Z)$, $x,y,z,t\in Z$. Тоді

$$XA=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa+yb & 0\\ za+tb & 0\end{pmatrix}\in T,\ \text{оскільки } xa+yb\in Z,\ za+tb\in Z.$$

$$AX=\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & ay\\ bx & by\end{pmatrix}\notin T \text{ при } ay\neq 0 \text{ і } by\neq 0.$$

Отже, T є лівим і не є правим ідеалом кільця $M_2(Z)$.

8. Знайти розклад многочлена $f(x)=2x^5-x^4+x^3-3x^2+2x-4$ за степенями двочлена $x-1$.

Розв'язання.

Щоб знайти коефіцієнти розкладу многочлена $f(x)$ за степенями $x-1$, потрібно за схемою Горнера спочатку поділити з остачею на $x-1$ многочлен $f(x)$, потім першу неповну частку, другу неповну частку і т.д. Одержані при цьому остачі і є шуканими коефіцієнтами. Ці кроки ділення можна подати у вигляді таблиці:

	2	-1	1	-3	2	-4
1	2	1	2	-1	1	**-3**
1	2	3	5	4	**5**	
1	2	5	10	**14**		

1	2	7	**17**
1	2	**9**	
1	**2**		

Отже, $f(x)=2(x-1)^5+9(x-1)^4+17(x-1)^3+14(x-1)^2+5(x-1)-3$.

9. Знайти НСД і НСК многочленів:

$$f(x)=x^4-4,\ g(x)=4x^3-x^2+8x-2\ .$$

Розв'язання.

Оскільки НСД многочленів визначається з точністю до сталого множника, тому можна множити ділене і дільник на довільну відмінну від нуля константу, щоб уникнути дробових коефіцієнтів.

$$\begin{array}{r|l}
x^4-4 & 4x^3-x^2+8x-2 \\ \cline{2-2}
4x^4-16 & x+1 \\ \cline{1-1}
4x^4-x^3+8x^2-2x & \\ \cline{1-1}
x^3-8x^2+2x-16 & \\
4x^3-32x^2+8x-64 & \\
4x^3-x^2+8x-2 & \\ \cline{1-1}
-31x^2-62 & \\
x^2+2 & \\ \cline{1-1}
4x-1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^3-x^2+8x-2 & \\
4x^3+8x & \\ \cline{1-1}
-x^2-2 & \\
-x^2-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отже, $(f,g)=x^2+2$.

Для знаходження НСК многочленів використаємо формулу:

$$[f,g]=\frac{f\cdot g}{(f,g)}.$$

$$[f,g]=\frac{(x^4-4)(4x^3-x^2+8x-2)}{x^2+2}=(x^2-2)(4x^3-x^2+8x-2)=4x^5-x^4-16x+4.$$

10. Знайти многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, якщо цей многочлен має корені $i-1,\pi,-1+i\sqrt{3}$ і старший коефіцієнт 1.

Розв'язання.

Розклад шуканого многочлена $f(z)$ на незвідні множники над полем C має вигляд:

$$f(z)=1\cdot(z-(-1+i))(z-(-1-i))(z-(-1+i\sqrt{3}))(z-(-1-i\sqrt{3}))(z-\pi)=$$
$$=(z+1-i)(z+1+i)(z+1-i\sqrt{3})(z+1+i\sqrt{3})(z-\pi)=$$
$$=\left((z+1)^2-i^2\right)\left((z+1)^2-(i\sqrt{3})^2\right)(z-\pi)=(z^2+2z+2)(z^2+2z+4)(z-\pi).$$

11. Розкласти многочлен $f(z)=z^4+4$ на незвідні множники над полями C,R,Q.

Розв'язання.

$$z^4+4=(z^2+2)^2-4z^2=(z^2-2z+2)(z^2+2z+2).$$

Розклад в полях R і Q:

$$f(z)=(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)\ ,$$

а в полі C:

$$f(z)=(z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i).$$

12. Розв'язати рівняння: $x^3-9x^2+21x-5=0$.

Розв'язання.

Зробимо заміну $x=y-\frac{a}{3}=y-\frac{-9}{3}=y+3$; отримаємо рівняння

$$(y+3)^3-9(y+3)^2+21(y+3)-5=$$

$$= y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - 9y^2 - 54y - 81 + 21y + 63 - 5 = 0,$$

тобто

$$y^3 - 6y + 4 = 0.$$

Це неповне кубічне рівняння вигляду $y^3 + py + q = 0.$ Тут $p = -6, q = 4$.

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2+2i} =$$

$$= \sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right).$$

Позначимо через u_0 значення радикала u, яке отримується при $k = 0$, тобто

$$u_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i.$$

Тоді

$$v_0 = -\frac{p}{3u_0} = -\frac{-6}{3u_0} = \frac{2}{u_0} = \frac{2}{1+i} = \frac{2}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = 1 - i.$$

$$\begin{cases} y_0 = u_0 + v_0 = (1+i) + (1-i) = 2, \\ y_1 = u_0\varepsilon + v_0\varepsilon^2 = (1+i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1-i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}, \\ y_2 = u_0\varepsilon^2 + v_0\varepsilon = (1+i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1-i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

Оскільки $x = y + 3$, то можна знайти корені заданого рівняння:

$$x_0 = y_0 + 3 = 5,$$
$$x_1 = y_1 + 3 = 2 - \sqrt{3},$$
$$x_2 = y_2 + 3 = 2 + \sqrt{3}.$$

13. Розв'язати рівняння: $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$.

Розв'язання.

Розв'яжемо рівняння методом Феррарі.

$$x^4 - 2x^3 = -6x^2 + 2x - 5;$$
$$\left(x^2 - x\right)^2 = -5x^2 + 2x - 5.$$

Доповнимо ліву частину цього рівняння до повного квадрата, ввівши параметр y:

$$\left(x^2 - x\right)^2 + 2y\left(x^2 - x\right) + y^2 = 2y\left(x^2 - x\right) - 5x^2 + 2x + y^2 - 5;$$
$$\left(x^2 - x + y\right)^2 = (2y - 5)x^2 + (2 - 2y)x + \left(y^2 - 5\right).$$

Виберемо y так, щоб у правій частині теж був повний квадрат. Для цього дискримінант повинен дорівнювати нулю:

$$(2 - 2y)^2 - 4(2y - 5)\left(y^2 - 5\right) = 0;$$
$$(1 - y)^2 - (2y - 5)\left(y^2 - 5\right) = 0;$$
$$1 - 2y + y^2 - 2y^3 + 5y^2 + 10y - 25 = 0;$$
$$y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0;$$
$$y^2(y - 3) - 4(y - 3) = 0;$$
$$(y - 3)\left(y^2 - 4\right) = 0.$$

Одним з коренів останнього рівняння є $y = 3$. Маємо:

$$\left(x^2 - x + 3\right)^2 = x^2 - 4x + 4;$$

$$\left(x^2-x+3\right)^2=\left(x-2\right)^2.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x+3=x-2, \\ x^2-x+3=-x+2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+5=0, \\ x^2+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=1\pm 2i, \\ x_{3,4}=\pm i. \end{array}\right.$$

14. Довести, що число $\alpha=\sqrt[4]{2-\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}}$ є алгебраїчним, і знайти його мінімальний многочлен.

Розв'язання.

Позбавимося радикалів у правій частині заданої рівності. Для цього послідовно піднесемо обидві частини рівності до четвертого, третього і другого степенів. Матимемо:

$\alpha^4=2-\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$, $\alpha^4-2=-\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$, $(\alpha^4-2)^3=-1-\sqrt{3}$, $(\alpha^4-2)^3+1=-\sqrt{3}$, $((\alpha^4-2)^3+1)^2=3$.

Остання рівність означає, що число α є коренем многочлена $f(x)=((x^4-2)^3+1)^2-3$ з раціональними коефіцієнтами, тобто α є алгебраїчним числом. Знайдемо канонічну форму многочлена $f(x)$:

$$f(x)=(x^{12}-6x^8+12x^4-7)^2-3=x^{24}-12x^{20}+60x^{16}-158x^{12}+228x^8-168x^4+46.$$

Оскільки всі коефіцієнти многочлена $f(x)$, крім старшого, діляться на 2, а вільний член 46 не ділиться на 4, то, за критерієм Ейзенштейна, многочлен $f(x)$ є незвідний у полі Q. Отже, $f(x)$ є мінімальним многочленом алгебраїчного числа α.

2.9. Алгебра і теорія чисел. Рекомендована література

Основна:

1. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч. К., "Вища школа", 1976. Ч.2. – 383 с.
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М., "Высшая школа", 1979. – 559 с.
3. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.2. К., "Вища школа", 1986. – 264 с.
4. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.1. К., "Вища школа", 1983. – 232 с.

Додаткова:

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., "Наука", 1971. – 432 с.
6. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М., "Наука", 1984. – 416 с.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М., "Наука", 1977. – 496 с.
8. Бородін О.І. Теорія чисел. К., "Вища школа", 1970. – 274 с.
9. Бухштаб А.А. Теория чисел. М., "Просвещение", 1966. – 384 с.
10. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри. К., "Вища школа", 1971. – 316 с.
11. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. М., "Просвещение", 1970. – 128 с.
12. Морокішко Є.П. Збірник задач і вправ з теорії чисел . К., "Магістр-S", 1996. – 158 с.
13. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Збірник індивідуальних розрахункових завдань з курсу "Алгебра і теорія чисел": У 2 ч. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – Ч.1. – 172 с.
14. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Збірник індивідуальних розрахункових завдань з курсу "Алгебра і теорія чисел": У 2 ч. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2011. – Ч.2. – 120 с.

Розділ 3. Аналітична геометрія. Проективна геометрія та основи геометрії. Диференціальна геометрія і топологія

3.1. Загальні положення

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями (множина, вектор, пряма, площина, простір, крива 2-го порядку, поверхня 2-го порядку, квадрика); мати чітке уявлення про операції над векторами, основні типи рівнянь прямої та площини, властивості кривих та поверхонь 2-го порядку, перетворення площини, квадрики, диференціальні властивості кривих у площині та тривимірному просторі (дотична і нормаль, кривина і скрут, елементи супровідного тригранника Френе), диференціальні властивості поверхонь (дотична площина і нормаль, перша та друга квадратичні форми та їх застосування, кривина лінії на поверхні, різні кривини поверхні, «чудові» лінії на поверхні); володіти навичками дослідження властивостей геометричних об'єктів у афінному та евклідовому просторах та топологічних властивостей множин; вміти застосовувати теоретичні факти до розв'язування практичних задач, мати уявлення про властивості проективної площини та площини Лобачевського.

3.2. Основні факти і теореми

Аналітична геометрія.

1. Декартова та полярна системи координат.
2. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Декартові координати вектора.
3. Основні задачі на координати. Скалярний добуток векторів.
4. Векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів. Застосування методу координат.
5. Лінії в площині та їх рівняння. Основні види рівнянь прямої в площині. Загальне рівняння прямої.
6. Взаємне розміщення двох прямих, відстань від точки до прямої, кут між двома прямими.
7. Конічні перерізи. Еліпс та його властивості.
8. Гіпербола та її властивості. Парабола та її властивості.
9. Геометричні властивості дотичних до конічних перерізів. Полярне рівняння конічних перерізів. Загальне рівняння лінії другого порядку.
10. Асимптотичні напрями. Центр лінії.
11. Дотична до лінії, діаметри лінії, спряжені напрями, основні діаметри, головні напрями.
12. Різні способи задання площини. Загальне рівняння площини.
13. Взаємне розміщення 2-х, 3-х площин. Відстань від точки до площини. Кут між 2-ма площинами.
14. Рівняння прямої в просторі. Кути між 2-ма прямими, між прямою і площиною. Відстані від точки до прямої, між двома мимобіжними прямими.
15. Рівняння поверхні. Сфера, еліпсоїд.
16. Гіперболоїди. Прямолінійні твірні.
17. Параболоїди. Прямолінійні твірні.
18. Циліндричні поверхні.
19. Конічні поверхні.
20. Поверхні обертання. Діаметральні площини, центр, дотична площина до поверхні.
21. Головні напрями поверхонь. Асимптотичний конус. Класифікація поверхонь.
22. Рівняння квадрики в Ап, зведення його до канонічного виду. Асимптотичні напрями, центральні, діаметральні площини.
23. Рівняння квадрики в Еп, зведення його до канонічного виду. Ортогональні перетворення

Диференціальна геометрія

1. Дотична до кривої.
2. Довжина дуги. Натуральна параметризація кривої. Кривина і скрут. Формули Френе.
3. Формули для обчислення кривини і скруту.
4. Натуральні рівняння кривої. Плоскі криві. Еволюта.
5. База топології. Метричні простори.
6. Неперервність та гомеоморфізм. Зв'язність. Віддільність. Компактність.
7. Криві на гладкій поверхні. Дотична площина і нормаль до поверхні.
8. Довжина дуги лінії на поверхні. 1-ша квадратична форма
9. Кут між лініями на поверхні. Площа частина поверхні.

10. Кривина кривої на поверхні. 2-га квадратична форма.
11. Нормальні перетини поверхні. Індикатриса Дюпена.
12. Класифікація точок поверхні. Формула Ейлера.
13. Середня і повна кривини поверхні. Знаходження головних напрямів. Теорема Родріга.
14. Геодезична кривина. Геодезичні лінії.
15. Теореми Гауса і Гауса-Бонне. Поверхні сталої кривини.

Проективна геометрія та основи геометрії.

1. Подвійне відношення чотирьох точок. Гармонізм.
2. Розширена евклідова площина. Проективна площина.
3. Однорідні афінні координати на розширеній евклідовій площині. Криві другого порядку в однорідних афінних координатах.
4. Принцип двоїстості. Теорема Дезарга. Подвійне відношення чотирьох точок і прямих на площині.
5. Повний чотиривершинник і повний чотиристоронник.
6. Квадрики та їх класифікації. Взаємне розташування прямої і квадрики. Поляри і полюси.
7. Теореми Паскаля та Бріаншона. Квадрики на розширеній евклідовій площині.
8. Деякі факти геометрії Лобачевського.
9. Деякі факти геометрії Рімана.

3..3. Аналітична геометрія. Зразки задач.

1. Знайти прямокутні координати точок $A\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3;\frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(1;\frac{5\pi}{4}\right)$, $K\left(2;\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Знайти полярні координати точок: $A(0;6), B(-2;0), C(-1;1), D\left(\sqrt{3};1\right)$, $K(0;-3), P\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

3. Обчислити площу трикутника, якщо одна із його вершин міститься в полюсі, а дві інші мають полярні координати:

а) $A\left(4;\frac{\pi}{9}\right), B\left(1;\frac{5\pi}{18}\right)$;

б) $A\left(5;\frac{\pi}{3}\right), B\left(3;\frac{7\pi}{12}\right)$.

4. Сторона ромба дорівнює $5\sqrt{2}$, дві його протилежні вершини є $A(3;-4)$, $C(1;2)$. Обчислити довжину висоти цього ромба.

5. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(3;0)$ і $C(-4;1)$. Знайти дві його інші вершини.

6. Дано вершини чотирикутника $A(-3;12)$, $B(3;4)$, $C(5;-4)$, $D(5;8)$. В якому відношенні діагональ AC ділить діагональ BD?

7. Вершини трикутника є точки $A(3;6), B(-1;3), C(2;-1)$. Обчислити довжину його висоти, проведеної з вершини C.

8. Точки $A(3;7), B(2;-3), C(-1;4)$ є вершинами паралелограма. Обчислити довжину його висоти, опущеної із вершини B на сторону AC.

9. Площа трикутника $S=3$, дві його вершини є точки $A(3;1), B(1;-3)$, а третя вершина C лежить на осі Oy. Знайти координати вершини C.

10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

11. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\gamma=60^{\circ}$, причому $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

12. Перевірити, чи точки *A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3), D(3;-5;3)* є вершинами трапеції.

13. На площині дано два вектори $\vec{a}(2;-3)$, $\vec{b}(1;2)$. Знайти розклад вектора $\vec{p}(9;4)$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$.

14. Дано три вектори $\vec{a}(3;-1)$, $\vec{b}(1;-2)$ і $\vec{c}(-1;7)$. Знайти розклад вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ за базисними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

15. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, обчислити:

а) $\bar{a}^2$;

б) $(\bar{a}-\bar{b})^2$;

в) $(3\bar{a}+2\bar{b})^2$;

г) $(3\bar{a}-2\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$.

16. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно-перпендикулярні, а вектор $\bar{c}$ утворює з ними кути $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$, $|\bar{c}|=8$, обчислити:

а) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2$;

б) $(\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c})^2$;

в) $(3\bar{a}-2\bar{b})(\bar{b}+3\bar{c})$.

17. Дано, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$. При якому значенні α вектори $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ і $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ перпендикулярні?

18. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$. Знайти його внутрішній кут при вершині *B*.

19. Знайти вектор $\bar{x}$, колінеарний до вектора $\bar{a}(2;1;-1)$ і який задовольняє умову $\bar{x}\cdot\bar{a}=3$.

20. Дано вектори $\bar{a}(3;-1;5), \bar{b}(1;2;-3)$. Знайти вектор $\bar{x}$, який є перпендикулярний до осі *OZ* і задовольняє умови: $\bar{x}\cdot\bar{a}=9$ і $\bar{x}\cdot\bar{b}=-4$.

21. Сила $\vec{f}(3,2,-4)$ прикладена до точки $A(2,-1,1)$. Знайти величину моменту цієї сили відносно початку координат.

22. Обчислити $|\vec{a}\times\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а кут між ними 30°.

23. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}$.

24. Знайти відстань від точки $A(3;2;-2)$ до прямої, що проходить через точки $M(1;2;-3)$ і $K(5;2;0)$.

25. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до осі OZ і до вектора $\vec{a}(8;-15;3)$, утворює гострий кут з віссю OX. Знаючи, що $|\vec{x}|=51$, знайти його координати.

26. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2;-3;1)$ і $\vec{b}(1;-2;3)$ та задовольняє умову $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

27. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

28. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 30°. Знаючи, що $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=3$, обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

29. Об'єм тетраедра $V=5$, три його вершини знаходяться у точках $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

30. Об'єм тетраедра $V=15$, три його вершини знаходяться у точках $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oz.

31. Задано трикутник з вершинами $A(0;-2), B(0;2), C(2;4)$. Скласти рівняння сторони AC, медіани BM, висоти BK.

32. Задано трикутник з вершинами $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

33. Задано трикутник з вершинами $A(2;-2), B(3;-5), C(5;7)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A.

34. Задано рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0,\ 3x+2y-7=0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника.

35. Точка $A(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x-y+8=0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі квадрата.

36. Знайти проекцію точки $A(-8;12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2;-3)$ і $C(-5;1)$.

37. Знайти точку, симетричну до точки $A(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $B(3;-4), C(-1;-2)$.

38. Дано вершини трикутника $A(-10;-13), B(-2;3), C(2;1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного із вершини B на медіану, проведену із вершини C.

39. Через точку перетину прямих $x+6y+5=0,\ 3x-2y+1=0$ провести пряму, що проходить через точку $A\left(-\frac{4}{5};1\right)$.

40. Через точку перетину прямих $4x+2y-19=0,\ 5x+6y+6=0$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $x+y+1=0$. Знайти її рівняння.

41. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x+7y-8=0,\ 3x+2y+5=0$ під кутом 45^0 до прямої $2x+3y-7=0$.

42. Скласти рівняння кола з центром в точці $C(1;-1)$ і дотичною $5x-12y+9=0$.

43. Скласти рівняння кола, якщо точки $A(3;2)$ і $B(-1;6)$ є кінцями одного із діаметрів кола.

44. Скласти рівняння хорди кола $(x-3)^2+(y-7)^2=169$, що ділиться в точці $A(8{,}5;3{,}5)$ навпіл.

45. Визначити, які лінії задаються наступними рівняннями:

1) $y=\sqrt{9-x^2}$;
2) $y=-\sqrt{25-x^2}$;
3) $x=-\sqrt{4-y^2}$;
4) $x=\sqrt{16-y^2}$;
5) $y=15+\sqrt{64-x^2}$;
6) $y=15-\sqrt{64-x^2}$;
7) $x=-2-\sqrt{9-y^2}$;
8) $x=-2+\sqrt{9-y^2}$.

46. Скласти рівняння дотичної до кола $x^2+y^2=5$, що проходять через точку $A\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

47. Написати рівняння еліпса, якщо:

а) відстань між фокусами 8, а ексцентриситет $\frac{1}{2}$;

б) ексцентриситет $\sqrt{\frac{3}{5}}$, мала вісь 4;

г) еліпс проходить через точку $M\left(-2;\frac{11}{\sqrt{15}}\right)$ і ексцентриситет $\frac{2}{\sqrt{15}}$;

48. Знайти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$, фокус $F(2{,}1)$ і рівняння відповідної директриси $x-5=0$.

49. Визначити, які лінії задаються наступними рівняннями:

1) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$;
2) $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;
3) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$;
4) $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$.

50. Знайти рівняння діаметра еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, що проходить через середину його хорди, яка відтинається на прямій $2x-y-3=0$.

51. Знайти рівняння двох взаємно спряжених діаметрів еліпса $x^2+4y^2=1$, один з яких утворює з віссю OX кут 45^0.

52. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(10;-8)$ і дотикається до еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

53. Знайти рівняння дотичних до еліпса $x^2+4y^2=20$, які перпендикулярні до прямої $2x-2y-13=0$.

54. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

е) гіпербола має асимптоту $4y\pm 3x=0$ і директрису $5x\pm 16=0$;

є) рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами дорівнює $\frac{64}{5}$;

ж) рівняння асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ і відстань між вершинами 48;

55. Кут між асимптотами гіперболи дорівнює 60°. Знайти ексцентриситет гіперболи.

56. Визначити, які лінії задаються такими рівняннями:

а) $y=\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$; г) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$;

б) $y=-3\sqrt{x^2+1}$; д) $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$;

в) $y=-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+9}$; е) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$.

57. Знайти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$, фокус $F(2;-3)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

58. Знайти рівняння дотичних до гіперболи $4x^2-y^2=4$, які перпендикулярні до прямої $10x+3y=0$.

59. Знайти рівняння дотичних до гіперболи $x^2-y^2=16$, проведених з точки $A(-1;-7)$.

60. На параболі $y^2=16x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 8.

61. На параболі $y^2=32x$ знайти точку, віддаль від якої до прямої $4x+3y+10=0$ дорівнює 2.

62. Дано вершину параболи $A(6;-3)$ і рівняння її директриси $3x-5y+1=0$. Знайти фокус параболи.

63. Дано вершину параболи $A(-2;-1)$ і рівняння її директриси $x+2y-1=0$. Знайти рівняння цієї параболи.

64. До параболи $y^2=36x$ з точки $A(2;-4)$ проведені дотичні. Знайти їх рівняння.

65. Знайти рівняння діаметра параболи $y^2=12x$, що проходить через середину її хорди, яка відтинається на прямій $3x+y-5=0$.

66. Які криві другого порядку задані наступними рівняннями в полярних координатах:

а) $\rho = \dfrac{6}{1-\cos\varphi}$; г) $\rho = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\varphi}$;

б) $\rho = \dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$; д) $\rho = \dfrac{10}{1-\dfrac{3}{2}\cos\varphi}$;

в) $\rho = \dfrac{5}{3-4\cos\varphi}$; е) $\rho = \dfrac{3}{4-\sqrt{13}\cos\varphi}$.

67. Знайти полярні рівняння кривих:

а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; г) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}=1$;

б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; д) $y^2=6x$;

в) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ е) $y^2=10x$

68. Знайти рівняння дотичних до лінії $x^2-2xy+y^2-4x+4=0$, що проходять через точку A (1;0).

69. Знайти рівняння асимптот наступних ліній:

а) $2x^2+3xy+y^2-2x+4=0$;

б) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$;

в) $3x^2++10xy+7y^2+4x+2y+1=0$;

г) $2x^2+xy+y^2+11x-4y+5=0$;

д) $xy-y^2-2x+3y-1=0$;

е) $3x^2-4xy+14x-4y+15=0$;

є) $5x^2-26xy+5y^2-8x+16y+2=0$;

ж) $4x^2-12xy-7y^2+8x+6y=0$.

70. Знайти головні напрями наступних ліній другого порядку:

а) $x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6=0$;

б) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;

в) $2xy-4y+2y-3=0$;

г) $x^2-4xy+4y^2-5x+6=0$;

д) $x^2+xy+2y^2-3x+y=0$.

71. Знайти множини центрів для кожної з наступних ліній:

а) $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$;

б) $x^2-6xy+9y^2-12x+36y+20=0$;

в) $9x^2-4xy-7y^2-12=0$;

г) $4x^2+4xy+y^2-8x-4y-21=0$;

д) $4x^2-4xy+y^2-6x+8y+13=0$;

е) $4x^2-20xy+25y^2-14x+2y-15=0$;

є) $2x^2-6xy+5y^2+22x-36y+11=0$;

ж) $x^2+4xy+4y^2=0$.

72. Звести рівняння ліній до канонічного виду:

а) $2x^2-8xy+4y+9=0$;

б) $x^2+6y^2-6x+12y+13=0$;

в) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$;

г) $y^2-2x-10=0$;

д) $x^2-6x-4y+5=0$;

е) $x^2+2y^2-4x-12y+23=0$;

є) $x^2-10x+26=0$;

ж) $x^2-4y^2-4x-8y-4=0$;

з) $x^2-2y^2+2\sqrt{3}x+20y-47=0$;

к) $x^2-y^2-20y-105=0$.

73. Знайти нерухомі точки афінних перетворень:

а) $\begin{cases} x'=4x+y-4, \\ y'=x+2y-2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x'=3x-3y+1, \\ y'=4x-5y+2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x'=2x-3y+1, \\ y'=2x-5y. \end{cases}$

74. Записати формули осьової симетрії, вісь якої в прямокутній декартовій системі координат задана рівняннями:

а) $x-y=0$;

б) $x-y+4=0$;

в) $3x+4y-10=0$;

г) $5x-12y-27=0$.

75. Знайти площину, що проходить через дві точки A(1;-1;2) і B(3;1;1), перпендикулярно до площини $x-2y+3z-5=0$.

76. Знайти площу трикутника, що відтинається площиною $5x-6y+3z+120=0$ від координатного кута ОХУ.

77. На осі ОУ знайти точку, віддалену від площини $x+2y-2z-2=0$ на відстані 4одиниці.

78. Через точку $A(1;-3;4)$ провести пряму, паралельну до прямої $\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+3y-z-1=0.\end{cases}$

79. У трикутнику ABC $A(3;6;-7)$, $B(-3;2;3)$, $C(4;-7;-2)$. Знайти параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини C.

80. Через точку $A(1;5;-1)$ провести пряму, перпендикулярну до прямих $\begin{cases}2x-y+3z+4=0,\\ -x+2y+2z-2=0\end{cases}$ і $\begin{cases}x-y-z+1=0,\\ 2x+y+4z=0.\end{cases}$

81. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;3;-1)$, перетинає пряму $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{3}$ і перпендикулярна до неї.

82. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;-3;3)$ і перпендикулярно до площини $x-3y+4z-1=0$.

83. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\ x+y-z+2=0.\end{cases}$

84. При якому значенні k пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{k}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна до площини $x-3y+6z+7=0$?

85. Знайти проекцію точки $A(2;-1;3)$ на пряму $\begin{cases}x=3t,\\ y=5t-7,\\ z=2+2t.\end{cases}$

86. Знайти точку B, симетричну до точки $A(4;1;6)$ відносно прямої $\begin{cases}x-y-4z+12=0,\\ 2x+y-2z+3=0.\end{cases}$

87. Знайти точку B, симетричну до точки $A(2;-5;7)$ відносно прямої, що проходить через точки $M_1(5;4;6)$ і $M_2(-2;-17;-8)$.

88. Знайти точку B, симетричну до точки $A(1;3;-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

89. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;2;-3)$ паралельно до прямих $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$ і $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

90. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(2;-2;1)$ і через пряму $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -3 + 2t. \end{cases}$

91. Знайти кут між прямою $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ і площиною $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

92. Знайти відстань від точки $A(7;9;7)$ до прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

93. Знайти відстань від точки $A(2;3;-1)$ до прямої $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$

94. Знайти відстань між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ і $\begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -2 + 4t. \end{cases}$

95. Написати рівняння сфери, якщо центром сфери є точка $C(3;-5;-2)$ і площина $2x - y - 3z + 11 = 0$ є дотичною до сфери.

96. Знайти рівняння сфери, що дотикається до двох площин $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ і $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, причому до однієї із них в точці $A(5;-1;-1)$.

97. Написати рівняння сфери, що проходить через початок координат і коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0. \end{cases}$

98. Знайти рівняння площин, що дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ і паралельні до площини $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

99. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $\begin{cases} z^2 = 10y, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі OZ.

100. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі OY.

101. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $\begin{cases} y^2 + \frac{z^2}{2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі OZ.

102. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі OX.

103. Знайти рівняння дотичних площин до еліпсоїда $4x^2+16y^2+8z^2=1$, паралельних до площини $x-2y+2z+17=0$.

104. Знайти рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, паралельних до площини $6x+4y+3z-17=0$.

105. На гіперболічному параболоїді $x^2-4y^2=16z$ знайти прямолінійні твірні, паралельні до площини $6x+4y-8z+1=0$.

106. Знайти рівняння конуса з вершиною $S(0;0;0)$, який проходить через лінію $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1,\\ 2x-y+4z-2=0.\end{cases}$

107. Знайти рівняння конуса з вершиною $S(1;2;4)$, твірні якого утворюють з площиною $2x+2y+z=0$ кут $\varphi=45^\circ$.

108. Знайти рівняння конуса з вершиною в точці $O(0;0;0)$, напрямна лінія якого задана рівнянням $\begin{cases}x^2-2z+1=0,\\ y-z+1=0.\end{cases}$

109. Знайти рівняння кругового циліндра, що проходить через точку $S(2;-1;1)$, якщо його віссю є пряма $\begin{cases}x=3t+1\\ y=-2t-2\\ z=t+2\end{cases}$.

110. Знайти рівняння циліндра, напрямна якого задана рівнянням $\begin{cases}x^2-y^2=z\\ x+y+z=0\end{cases}$, а твірні перпендикулярні до площини напрямної.

111. Знайти центри квадрик в просторі A_3

а) $3x_1^2+2x_2^2-2x_1x_3+4x_2x_3-4x_1-8x_3-8=0., A_3$

б) $2x_1^2+12x_2^2+4x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+12x_2x_3-10x_1+14x_3+7=0., A_3$

в) $2x_1^2+10x_2^2-2x_3^2+12x_1x_2+8x_2x_3+12x_1+4x_2-8x_3-1=0., A_3$

г) $x_1^2+4x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3=0., A_3$

д) $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3+5x_1+5x_2+5x_3+2=0., A_3$

е) $4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_4^2-4x_1x_2+2x_2x_3+4x_1x_4-2x_1x_4+2x_1-x_2+x_4+15=0., A_3$

є) $2x_1^2+10x_2^2-2x_3^2+12x_1x_2+8x_2x_3+12x_1+4x_2-8x_3-1=0., A_3$

3.4. Проективна геометрія та основи геометрії. Зразки задач.

1. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки $A(1:4:2)$ і $B(2:6:1)$ з прямою $u: 3x_1 - 4x_3 = 0$.
2. Задано координати чотирьох точок A, B, C, D. Знайти координати точки перетину M прямих AB і CD, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. Задано чотири прямі:
$$a: 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \quad c: 2x_1 + x_3 = 0,$$
$$b: 4x_1 - x_2 = 0, \qquad d: x_1 - x_2 + x_3 = 0;$$
Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $a \cap b$ і $c \cap d$.
4. Задано шість точок A_i:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
Довести, що точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$ лежать на одній прямій.
5. Задано точки
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Довести їхню колінеарність та знайти подвійне відношення $(ABCD)$.

6. Переконатися, що подані четвірки прямих належать одному пучку:

а)
$$a: x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;$$
$$b: -x_2 + x_3 = 0;$$
$$c: x_1 - x_3 = 0;$$
$$d: x_1 - x_2 = 0;$$

б)
$$a: x_2 = 0;$$
$$b: x_1 - x_2 = 0;$$
$$c: 3x_1 - x_2 = 0;$$
$$d: 5x_1 - x_2 = 0.$$

Знайти подвійні відношення: $(abcd), (adbc), (dcba)$.

7. Побудувати конфігурацію Дезарга, якщо дві вершини A_∞ і C_∞ тривершинника $A_\infty BC_\infty$ – невласні точки.
8. Побудувати конфігурацію Дезарга, якщо точка $P_\infty = (BC) \cap (B_1C_1)$ – невласна.
9. Побудувати конфігурацію Дезарга, якщо пара невідповідних вершин C_∞ і $A_{1\infty}$ тривершинників ABC_∞ та $A_{1\infty}B_1C_1$ – невласні точки.
10. Задано пряму a, неколінеарні точки $A, B, C,$ неінцидентні a. Добудувати конфігурацію Дезарга так, щоб a була дезарговою віссю, а тривершинник ABC – дезарговим тривершинником.

3..5. Диференціальна геометрія та топологія. Зразки задач.

1. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривих в заданій точці:

а) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $A(-2;0{,}8)$.

в) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$, $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

е) $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=47\\ x^2-2y^2-z=0\end{cases}$, $A(-2;1;6)$.

2. Знайти рівняння дотичної до кривої $\bar{r}(t)=(3t-t^3;3t^2;3t+t^3)$, перпенди-кулярної до вектора $\bar{a}(3,1,1)$.
3. Знайти довжину дуги кривої $\bar{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$, $0\le t\le 2\pi$,
4. Знайти довжину дуги кривої $\bar{r}(t)=\left(at,a\sqrt{2}\ln t,\dfrac{c}{t}\right)$ між точками $A(1)$ і $B(10)$.
5. Знайти довжину дуги кривої $\bar{r}(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t)$, що міститься між точками $A(0)$ і $B(\pi)$.
6. Записати в натуральній параметризації рівняння кривої $\bar{r}(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t)$.
7. Знайти кривину і скрут кривої $\bar{r}=(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t)$ в точці $A(1,1,0)$.
8. В яких точках кривої $\bar{r}=(\cos t,\sin t,\dfrac{1}{2}\sin 2t)$ скрут є додатним?
9. При яких значеннях h гвинтова лінія $\bar{r}=(a\cos t,a\sin t,ht)$ має найбіль-ший скрут?
10. Довести, що крива $\begin{cases}x^2=2az\\ y^2=2bz\end{cases}$ є плоска.
11. Знайти канонічний репер кривої:

а) $\bar{r}=(t,t^2,t^3)$ в довільній точці;

б) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ x^2+y^2=2\end{cases}$ в точці $A(1;1;1)$

12. Знайти рівняння бінормалі і стичної площини кривої $\begin{cases}y=\dfrac{x^3}{3}\\ z=\dfrac{1}{2x}\end{cases}$ в точці $A\left(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$.
13. Знайти рівняння стичної площини кривої $\bar{r}=\left(t,\dfrac{t^2}{2},\dfrac{t^3}{3}\right)$, що проходить через точку $A(0,0,9)$.
14. Знайти кривину кривої $y=\sin x$ в точці $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

15. Знайти кривину лінії $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{2}$.

16. Знайти натуральні рівняння лінії $\overline{r} = (a\cos t, a\sin t, ht)$.

17. Знайти натуральні рівняння лінії $\overline{r} = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

18. Знайти дотичні площини поверхні $z = x^4 - 2xy^3$, перпендикулярні до прямої $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z+1}{1}$.

19. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні $x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$, паралельної до площини $x - y + 2z = 0$.

20. Для поверхні $xyz = 1$ знайти рівняння дотичної площини, що паралельна до площини $x + y + z - 1 = 0$.

21. Знайти периметр криволінійного трикутника, утвореного перетином ліній $u = \pm\dfrac{1}{2}av^2$, v = *1* на поверхні $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

22. На поверхні з лінійним елементом $ds^2 = du^2 + dv^2$ знайти кут між лініями $2u = v$ і $2u = -v$.

23. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника, утвореного лініями $u = v^2$, $u = -v^2$ і $v = 2$ на поверхні $\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, 2v)$.

24. Знайти нормальну кривину поверхні $\overline{r} = \left(u, v, u^2 + v^2\right)$ в точці $A(1;1)$, якщо $u - v^3 = 0$.

25. Знайти нормальну кривину косого гелікоїда $\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, u + v)$ при $v = 2$ в напрямку $u + v = 0$.

26. Знайти нормальну кривину поверхні $\overline{r} = (u, v, uv)$ в точці $P(2;2;4)$ в напрямку $v = u$.

27. Знайти головні напрямки поверхні $z = x^4 - 2xy^3$ в точці $A(0;-1;0)$.

28. Знайти головні кривини поверхні $\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$ в довільній точці.

29. Знайти повну і середню кривини параболоїда $z = axy$ в точці $x = y = 0$.

30. Знайти лінії кривини на поверхні $\overline{r} = \left(\dfrac{a}{2}(u - v), \dfrac{b}{2}(u + v), \dfrac{uv}{2}\right)$.

31. Знайти асимптотичні лінії на поверхні $z = xy^3 - yx^3$.

32. Нехай *A* – множина точок, що лежать на сторонах трикутника в R^2, U і V – доповнення до *A*. Чи будуть відкритими множинами *A*, U і V ?

33. Чи є метрикою функція $d(x, y) = \begin{cases} 0, \text{якщо} x = y \\ 1, \text{якщо} x \neq y \end{cases}$ на множині дійсних чисел.

34. Довести, що функція $d\left(x, y\right) = \left(x - y\right)^2$ не є метрикою на множині R.

35. Довести, що функція $d(x,y)=x^2+y^2$ не є метрикою на R.

36. Довести, що функція $d(x,y)=|x-y|+1$ не є метрикою на R.

37. Чи є пара (X,τ)топологічним простором, якщо:

а) $X=\{x,y\}, \tau=\{O,\{x,y\},\{x\}\}$;

б) $X=\{x,y,z\}, \tau=\{O,\{x,y,z\},\{y\}\}$;

в) $X=\{x,y,z\}, \tau=\{O,\{x,y,z\},\{x\},\{y\}\}$;

г) $X=\{x,y,z\}, \tau=\{O,\{x,y,z\},\{x,y\},\{x\}\}$.

3.6. Аналітична геометрія. Зразки відповідей

Задача 1. Знайти полярні координати точки $A(1;-\sqrt{3})$.

Розв'язання

$A(\rho;\varphi)$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

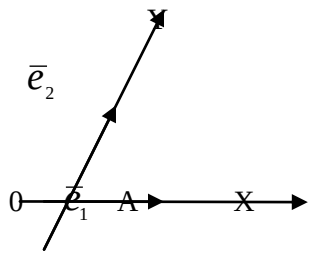
$\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}; \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки $\cos\varphi>0; \sin\varphi<0$, то кут φ знаходиться в четвертій чверті $\left(\dfrac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi\right)$ і тому $\varphi=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{3}\pi$. Отже, $M\left(2;\dfrac{5}{3}\pi\right)$.

Відповідь: $M\left(2;\dfrac{5}{3}\pi\right)$.

Задача 2. Нехай OAB – довільний трикутник. Записати формули перетворення координат точок при переході від загальної декартової системи координат $(O;\bar{e}_1;\bar{e}_2)$ до $(O';\bar{e}_1';\bar{e}_2')$, якщо $O(0;0)$, $\bar{e}_1=\overrightarrow{OA}$, $\bar{e}_2=\overrightarrow{OB}$, $O'=A$, $\bar{e}_1'=\overrightarrow{AB}$, $\bar{e}_2'=\overrightarrow{AO}$.

Розв'язання



$\bar{e}_1(1;0)$, $\overrightarrow{OA}(1;0)$, звідси $A(1;0)$.

$\bar{e}_2(0;1)$, $\overrightarrow{OB}(0;1)$ звідси $B(0;1)$.

Тоді $O'(1;0)$, $\vec{e}_1' = \overrightarrow{AB}(-1;1)$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{AO}(-1;0)$.

Формули перетворення матимуть вигляд: $\begin{cases} x = -x' - y' + 1, \\ y = x'. \end{cases}$

Задача 3. Обчислити площу паралелограма, три вершини якого є точки $A(-2;3)$, $B(4;-5)$, $C(-3;1)$.

Розв'язання

Знайдемо площу трикутника *ABC*:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10\,(кв.од.).$$

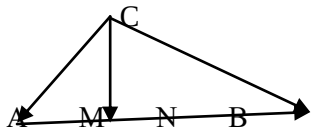
Тоді площа паралелограма *S* дорівнює $2S_{\Delta ABC}$:

$S = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot 10 = 20\,(кв.од.)$.

Відповідь: 20 кв. од.

Задача 4. У трикутнику *ABC* сторону *AB* точками *M* і *N* поділено на три рівні частини. Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Розв'язання



Знаходимо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \vec{b} - \vec{a}$. Значить, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3}$. Оскільки $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, то маємо: $\overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

Відповідь: $\overrightarrow{CM} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

Задача 5. Дано вектори $\vec{a}(2;-3)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{2};2\right)$. При яких значеннях α будуть колінеарні вектори $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \alpha\vec{b}$?

Розв'язання

Знаходимо координати векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$:

$\vec{p}\left(2 + \frac{1}{2}\alpha; -3 + 2\alpha\right)$; $\vec{q}\left(2 - \frac{1}{2}\alpha; -3 - 2\alpha\right)$.

Тоді з умови колінеарності векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$: $\dfrac{2 + \frac{1}{2}\alpha}{2 - \frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{-3 + 2\alpha}{-3 - 2\alpha}$ знаходимо $\alpha = 0$.

Задача 6. Знайти кут між векторами $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ і $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$.

Розв'язання

$$\cos\angle(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Задача 7. Дано вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ і $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання

Оскільки $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$.

Знаходимо $\bar{a}\bar{b} = 4m + 3m - 28$.

Звідси $7m - 28 = 0, m = 4$.

Задача 8. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4), C(4,3,2)$.

Розв'язання

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тому $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(1,2,3)$, $\overrightarrow{AC}(3,2,1)$. Тоді:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{6}.$$

Отже, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Задача 9. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ і $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$, якщо $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(1;1;2), \vec{c}(3;1;-1)$.

Розв'язання

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 21 - 2 = -29.$$ Тоді $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 29$.

Задача 10. Дано загальне рівняння прямої $4x - 5y + 15 = 0$. Написати:

а) рівняння з кутовим коефіцієнтом;

б) рівняння у відрізках;

в) нормальне рівняння.

Розв'язання

а) розв'язавши рівняння прямої відносно y, одержимо рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$5y = 4x + 15, \quad y = \frac{4}{5}x + 3$. Тут $k = \frac{4}{5}, \quad b = 3$.

$$4x-5y+15=0,$$
$$4x-5y=-15,$$

б) $\dfrac{4x}{-15}-\dfrac{5y}{-15}=1,$

$$\frac{x}{-\frac{15}{4}}+\frac{y}{3}=1,$$

$$a=-\frac{15}{4},\quad b=3.$$

в) знаходимо нормуючий множник:

$$N=-\frac{1}{\sqrt{4^2+(-15)^2}}=-\frac{1}{41},$$

$$4x-5y+15=0\left|\cdot\frac{-1}{\sqrt{41}}.\right.$$

$-\dfrac{4}{\sqrt{41}}x+\dfrac{5}{\sqrt{41}y}-\dfrac{15}{\sqrt{41}}=0$ нормальне рівняння прямої.

Тут $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}, \sin\alpha=\dfrac{-5}{13}$.

Задача 11. Знайти рівняння прямої, паралельної до прямої $2x+3y+6=0$, яка відтинає від координатного кута трикутник, площа якого *3 кв. од.*

Розв'язання

Нехай a і b – відрізки, які відтинає шукана пряма на осях ОХ і ОУ відповідно. Тоді

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab;$$
$$3=\frac{1}{2}ab;$$
$$ab=6.$$

Оскільки шукана пряма паралельна до прямої $2x+3y+6=0$, то її рівняння матиме вигляд

$$2x+3y+C=0$$

або

$$2x+3y=-C,$$
$$\frac{x}{-\frac{C}{2}}+\frac{y}{-\frac{C}{3}}=1,$$

де $-\dfrac{C}{2}=a, -\dfrac{C}{3}=b$.

Отже, маємо

$$\left(-\frac{C}{2}\right)\cdot\left(-\frac{C}{3}\right)=6,$$

$$\frac{C^2}{6}=6,\ C^2=36,\ C=\pm 6.$$

Рівняння шуканої прямої має вигляд:

$$2x+3y+6=0 \text{ або } 2x+3y-6=0.$$

Але $2x+3y+6=0$ – задана пряма в умові задачі, тоді $2x+3y-6=0$ – шукана.

Задача 12. Коло з центром в точці $A(1;-3)$ проходить через початок координат. Записати його рівняння.

Розв'язання

Запишемо рівняння шуканого кола з центром $A(1;-3)$ у вигляді: $(x-1)^2+(y+3)^2=R^2$.

Оскільки коло проходить через початок координат, то матимемо: $(0-1)^2+(0+3)^2=R^2$, звідки $R^2=10$.

Таким чином рівняння кола виглядає так: $(x-1)^2+(y+3)^2=10$.

Задача 13. Ексцентриситет еліпса дорівнює $\frac{1}{3}$, а відстань від точки *M* еліпса до директриси дорівнює 12. Знайти відстань від точки *M* до відповідного фокуса.

Розв'язання

За умовою задачі маємо, що $\varepsilon=\frac{1}{3}$, $d=12$. Тому, скориставшись рівністю $\varepsilon=\frac{r}{d}$, знаходимо $r=\varepsilon\cdot d=\frac{1}{3}\cdot 12=4$ – відстань від точки *M* до фокуса.

Відповідь: $r=4$.

Задача 14. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює 8, а кут нахилу однієї із асимптот 60°.

Розв'язання.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою *2c = 8*, звідси *c = 4*.

Оскільки $c^2=b^2+a^2$, то $b^2+a^2=16$.

Рівняння асимптоти $y=\frac{b}{a}x$, де $\frac{b}{a}=k=tg60^\circ=\sqrt{3}$.

Отже, матимемо систему рівнянь: $\begin{cases} a^2+b^2=16, \\ \frac{b}{a}=\sqrt{3}, \end{cases}$ з якої $a^2=4$, $b^2=12$.

Таким чином, шукана гіпербола має рівняння: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

Задача 15. Парабола симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $A(3;-6)$, а вершина її лежить в початку координат. Знайти її рівняння.

Розв'язання

Згідно до умови задачі рівняння параболи може мати вигляд $y^2 = 2px$ або $y^2 = -2px$. Оскільки шукана парабола проходить через точку A з додатною абсцисою, то її рівняння має вигляд $y^2 = 2px$. Підставивши в це рівняння координати точки A, одержимо $36 = 2p \cdot 3$, звідси $2p = 12$. Тоді $y^2 = 12x$ – шукане рівняння параболи.

Відповідь: $y^2 = 12x$.

Задача 16. Знайти рівняння еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1$ у полярній системі координат.

Розв'язання

З рівняння еліпса знаходимо: $a^2 = 20$, $b^2 = 10$. Тоді $c^2 = 20 - 10 = 10$ і $p = \frac{b^2}{a} = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5}$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а рівняння еліпса в полярних координатах має вигляд: $\rho = \frac{\sqrt{5}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2} - \cos\varphi}$.

Відповідь: $\rho = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2} - \cos\varphi}$.

Задача 17. Знайти точки перетину лінії $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 = 0$ з прямою $x + y - 2 = 0$.

Розв'язання

Для знаходження точок перетину даних лінії і прямої розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x(2-x) + (2-x)^2 - 4x + 4 = 0, \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \mathrm{x} = 2, \\ \mathrm{y} = 2 - \mathrm{x}. \end{cases}$$

Отже, існує дві точки $(1;2)$ і $(2;0)$ перетину.

Відповідь: $(1;2)$ і $(2;0)$.

Задача 18. Знайти вектор асимптотичного напряму лінії $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$.

Розв'язання

Запишемо умову асимптотичності вектора $\vec{p}(p_1; p_2)$ для даної лінії: $4p_1^2 - 5p_1p_2 + p_2^2 = 0$ або $4 - 5k + k^2 = 0$, де $k = \frac{p_2}{p_1}$. $k^2 - 5k + 4 = 0; k = 1, k = 4$.

Отже, існує два вектори асимптотичного напряму, що мають кутові коефіцієнти $k_1 = 1, k_2 = 4$. Тому в якості шуканих векторів можна взяти вектори $p_1(1;1)$ і $p_2(1;4)$.

Відповідь: $p_1(1;1)$, $p_2(1;4)$

Задача 19. Для кривої $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5y + 1 = 0$ знайти діаметр, що проходить через точку $A(3,2)$.

Розв'язання

Запишемо рівняння діаметра дано кривої $p_1\left(5x + y - \frac{3}{2}\right) + p_2\left(x + 5y + \frac{5}{2}\right) = 0$ або $5x + y - \frac{3}{2} + k\left(x + 5y + \frac{5}{2}\right) = 0$, де $k = \frac{p_2}{p_1}$. Оскільки точка $A(3,2)$ належить цьому діаметру, то маємо: $15 + 2 - \frac{3}{2} + k\left(3 + 10 + \frac{5}{2}\right) = 0$, звідки $k = -1$.

Підставивши знайдене значення k у загальне рівняння діаметра, одержимо рівняння, що проходить через точку A: $5x + y - \frac{3}{2} - \left(x + 5y + \frac{5}{2}\right) = 0$ або $x - y - 1 = 0$.

Відповідь: $x - y - 1 = 0$.

Задача 20. У загальній декартовій системі координат афінне перетворення задане формулами $\begin{cases} x' = 2x - y + 1, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ Знайти образ осі ОУ.

Розв'язання

Формули афінного перетворення запишемо так: $\begin{cases} 3x' = 6x - 3y + 3, \\ y' = x + 3y \end{cases}$ і знайдемо y, додавши до першого рівняння системи друге рівняння. Маємо: $3x' + y' = 7x + 3$, звідки $x = \frac{3}{7}x' + \frac{1}{7}y' - \frac{3}{7}$.

Оскільки рівняння осі *ОУ* є $x = 0$, то $\frac{3}{7}x' + \frac{1}{7}y' - \frac{3}{7} = 0$ і $3x' + y' - 3 = 0$ або $3x + y - 3 = 0$ є рівнянням образу прямої ОУ.

Відповідь: $3x + y - 3 = 0$.

Задача 21. Знайти площину, що проходить через точку А(2,-3,-4) і відтинає на координатних осях відмінні від нуля рівні відрізки.

Розв'язання

Запишемо рівняння шуканої площини у відрізках, враховуючи, що $a=b=c$.

Матимемо $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1, x + y + z = a$. Точка А(2,-3,-4) належить цій площині, тому одержимо $2 - 3 - 4 = à, à = -5$ і рівняння площини має вигляд $x + y + z + 5 = 0$.

Задача 22. Визначити взаємне розміщення двох прямих $l_1: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{-4}$ і

$$l_2: \begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -4 + t. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо точки M_1 і M_2, напрямні вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ прямих l_1 і l_2.

$M_1(-3,-2;6)$, $M_2(5;-1;-4)$, $\vec{p}_1(2;3;-4)$ і $\vec{p}_2(1;-4;1)$.

Оскільки $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ не колінеарні, не перпендикулярні, то обчислимо $\left(\overrightarrow{M_1M_2}; \vec{p}_1; \vec{p}_2\right)$.

$\overrightarrow{M_1M_2}(8;1;-10)$.

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}; \vec{p}_1; \vec{p}_2\right) = \begin{vmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

Відповідь: прямі перетинаються.

Задача 23. Знайти гострий кут між прямою $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - y + 4z + 5 = 0. \end{cases}$ і площиною $x + y + 3z - 1 = 0$.

Розв'язання

З рівняння прямої знаходимо напрямний вектор $\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, $\vec{p}(5;-2;-3)$ і вектор нормалі площини $\vec{n}(1;1;3)$. Тоді $\sin\varphi = \frac{|5-2-9|}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{418}}$; $\varphi = \arcsin\frac{6}{\sqrt{418}}$.

Відповідь: $\varphi = \arcsin\frac{6}{\sqrt{418}}$.

Задача 24. Знайти рівняння сфери з центром в початку координат, яка проходить через точку $A(-2;3;5)$.

Розв'язання

Радіус сфери дорівнює відстані від центра сфери $O(0;0;0)$ до точки A сфери, тому $r = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$.

Отже, рівняння сфери має вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = 38$.

Відповідь: $x^2 + y^2 + z^2 = 38$.

Задача 25. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо осі OZ лінії, заданої рівнянням $\begin{cases} 3x + 5z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

Розв'язання

Оскільки лінія задана рівнянням виду $\begin{cases} x = g(z), \\ y = 0, \end{cases}$ то рівнянням шуканої поверхні буде рівняння $x^2 + y^2 = g(z)$.

У нашому випадку $x = g(z) = -\frac{5}{3}z$. Отже, $x^2 + y^2 = \frac{25}{9}z^2$ або $9x^2 + 9y^2 - 25z^2 = 0$ є рівнянням поверхні обертання.

Відповідь: $9x^2 + 9y^2 - 25z^2 = 0$.

Задача 26. Знайти рівняння прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда $x^2 + 9y^2 - z^2 = 9,$ що проходить через точку $\grave{A}\left(3, \frac{1}{3}, -1\right)$.

Розв'язання

Через дану точку А проходить дві прямолінійні твірні, що належать таким двом сім'ям

$$\begin{cases} x - z = 3\lambda(1 - y), \\ \lambda(x + z) = 3(1 + y) \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x - z = 3\mu(1 + y), \\ \mu(x + z) = 3(1 - y) \end{cases}$$

Знайдемо значення λ і μ

$$\begin{cases} 4 = 2\lambda, \\ 2\lambda = 4 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 4 = 4\mu, \\ 2\mu = 2 \end{cases}$$

Звідки λ=2, μ=1

Отже, матимемо рівняння двох прямолінійних твірних

$$\begin{cases} x - z = 6(1 - y), \\ 2(x + z) = 3(1 + y) \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x - z = 3(1 + y), \\ x + z = 3(1 - y) \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} x + 6y - z - 6 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x - 3y - z - 3 = 0, \\ x + 3y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Задача 27. Написати рівняння конічної поверхні з напрямною $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1, \\ z = 2 \end{cases}$ і вершиною $S(1;0;1)$.

Розв'язання

Оскільки напрямна лінія задана рівнянням виду $\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ z = h, \end{cases}$ то рівняння конуса шукаємо у вигляді: $F\left(1 + \frac{x-1}{z-1}; \frac{y}{z-1}\right) = 0$, або $F\left(\frac{x+z-2}{z-1}; \frac{y}{z-1}\right) = 0$.

Отже, матимемо:

$\left(\frac{x+z-2}{z-1}\right)^2 - 2\frac{y^2}{(z-1)^2} = 1$, або $(x + z - 2)^2 - 2y^2 - (z-1)^2 = 0$.

$x^2 - 2y^2 + 2xz - 4x - 2z + 3 = 0$.

Відповідь: $x^2 - 2y^2 + 2xz - 4x - 2z + 3 = 0$.

Задача 28. Знайти канонічний та нормальний види квадратичної форми $f = x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$ та записати формули відповідного лінійного перетворення.

Розв'язання

$f = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 11x_3^2 - 6x_2x_3$

$i = 1, C_{11} = 1, C_{12} = -1, C_{13} = 2$

$y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3$

$y_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

$\frac{1}{C_{11}} = 1 \quad f - y_1^2 = -x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_2x_3$.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

$f = y_1^2 + (-y_2^2 + 7y_3^2 - 2y_2y_3)$

$g = -y_2^2 + 7y_3^2 - 2y_2y_3 = (-y_2^2 - 2y_2y_3) + 7y_3^2$.

$i = 2$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = -1$.

$z_2 = a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = -y_2 - y_3$.

$z_2^2 = y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2$.

$\frac{1}{a_{22}} = -1$, $g + z_2^2 = 8y_3^2$.

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = -y_2 - y_3, \\ z_3 = y_3. \end{cases}$$

$g = -z_2^2 + 8z_3^2$.

Тоді $f = y_1^2 + g = z_1^2 - z_2^2 + 8z_3^2$, де (1) $\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - 3z_3, \\ x_2 = -z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$ є канонічним видом даної квадратичної форми. За допомогою лінійного перетворення $\begin{cases} z_1 = v_1, \\ z_2 = v_2, \\ z_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} v_3 \end{cases}$ можна від канонічного виду (1) перейти до нормального виду $f = v_1^2 - v_2^2 + v_3^2$.

Відповідь: $f = z_1^2 - z_2^2 + 8z_3^2$, де $\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - 3z_3, \\ x_2 = -z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$ – канонічний вид; $f = v_1^2 - v_2^2 + v_3^2$,

де $\begin{cases} x_1 = v_1 - v_2 - \dfrac{3}{2\sqrt{2}} z_3, \\ x_2 = -v_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} v_3, \\ x_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} v_3 \end{cases}$ – нормальний вид даної квадратичної форми.

Задача 29. Звести до нормального виду рівняння квадрики

$x_1^2 + 11x_3^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_2 - 12x_3 + 12 = 0$.

Розв'язання

Квадратична форма $x_1^2 + 11x_3^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$ має нормальний вид $v_1^2 + v_2^2 + 8v_3^2$,

$$\text{де} \begin{cases} x_1 = v_1 - v_2 - 3v_3 \\ x_2 = -v_2 - v_3 \\ x_3 = v_3 \end{cases} \qquad (1)$$

є формулами переходу до нової афінної системи координат.

Підставивши формули (1) у лінійну форму даної квадрики одержимо:

$$v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2 - 4v_2 - 16v_3 - 12 = 0.$$

Дане рівняння спростимо за допомогою паралельного перенесення системи координат, виділивши повні квадрати: $v_1^2 - (v_2 + 2)^2 + 8(v_3 - 1)^2 - 16 = 0$.

При $\begin{cases} \omega_1 = v_1 \\ \omega_2 = v_2 + 2 \\ \omega_3 = v_3 - 1. \end{cases}$ рівняння квадрики має вигляд: $\omega_1^2 - \omega_2^2 + 8\omega_3^2 = 16$.

Взявши $\begin{cases} \omega_1 = 4u_1 \\ \omega_2 = 4u_2 \\ \omega_3 = \sqrt{2}u_3 \end{cases}$,

одержимо нормальний вигляд квадрики $u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 1$ (однопорожнинний гіперболоїд).

Формули перетворення координат мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 4u_1 - 4u_2 - 3\sqrt{2}u_3 - 1 \\ x_2 = -4u_2 - \sqrt{2}u_3 + 1 \\ x_3 = \sqrt{2}u_3 + 1 \end{cases}$$

де $O'(-1,1,1), \overline{e_1}'(4,0,0), \overline{e_2}'(-4,-4,0), \overline{e_3}'(4,0,0)$,

3.7. Проективна геометрія та основи геометрії. Зразки відповідей

Задача 1. Знайти точку перетину прямих $u(2:-1:1)$ та $v(1:3:-2)$.

Розв'язування. Розв'язуючи систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$, яка складена з рівнянь заданих прямих, знаходимо

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1:5:7 .$$

Це і є координати точки перетину.

Задача 2. Знайти точку перетину прямої $u(2:-1:1)$ з прямою, яка проходить через точки $A(2:-1:0)$ і $B(3:-3:1)$.

Розв'язування. Розв'яжемо цю задачу за допомогою параметричних рівнянь прямої AB, які мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 3\beta \\ x_2 = -\alpha - \beta \\ x_3 = \beta \end{cases} .$$

Визначимо, при яких значеннях параметрів α і β координати біжучої точки прямої AB задовольняють рівняння прямої u. Маємо

$$2(2\alpha + 3\beta) - (-\alpha - 3\beta) + \beta = 0$$

або після спрощення: $\alpha + 2\beta = 0$. Можна покласти $\alpha = 2, \beta = -1$ або взяти будь-які інші пропорційні значення α і β. З параметричних рівнянь прямої AB при цих значеннях параметрів отримуємо $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$. Тому шукана точка має координати $(1:1:-1)$.

Задача 3. Задано чотири точки: $A(5:1:0), B(1:0:0), C(2:3:1), D(1:-1:2)$. Знайти координати точки $M = (AB) \cap (CD)$.

Розв'язування. Позначимо координати шуканої точки M через $(x_1 : x_2 : x_3)$. Тоді з того, що $M \in (AB)$ випливає, що $M = \alpha A + \beta B$ або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $x_3 = 0$.

Аналогічно, з $M \in (CD)$ випливає $M = \gamma C + \delta D$ або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Щоб в останньому рівнянні отримати $x_3 = 0$, покладемо $\gamma = 2, \delta = -1$. Отримуємо $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $l(2:-1:1)$, $m(1:1:-1)$ і точку $A(2:-1:3)$.

Розв'язування. Можна знайти спочатку координати точки $B = l \cap m$, а потім знайти рівняння шуканої прямої за двома відомими точками. Розв'яжемо задачу, використовуючи умову належності трьох прямих (l, m і шуканої u) одному пучку. Тому $u = \lambda l + \mu m$ або

$$(u_1, u_2, u_3) = \lambda(2,-1,1) + \mu(1,1,-1) = (2\lambda + \mu, -\lambda + \mu, \lambda - \mu),$$

де (u_1, u_2, u_3) – координати шуканої прямої u, рівняння якої тепер можна записати у такому вигляді:

$$(2\lambda + \mu)x_1 + (-\lambda + \mu)x_2 + (\lambda - \mu)x_3 = 0.$$

Отримане рівняння задовольняють координати точки A. Тому

$$(2\lambda + \mu)\cdot 2 + (-\lambda + \mu)\cdot(-1) + (\lambda - \mu)\cdot 3 = 0,$$

звідки після спрощення отримуємо $4\lambda - \mu = 0$. Поклавши $\lambda = 1$, $\mu = 4$, знаходимо $u = (6,3,-3)$. Скоротивши координати на 3, отримаємо рівняння шуканої прямої $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Задача 5. *Задано точки* $A(1:-1:2), B(-2:1:3), C(1:0:-5), D(-3:2:1)$. *Довести їхню колінеарність та знайти подвійне відношення* $(ABCD)$.

Розв'язування. Переконавшись безпосереднім підрахунком у рівності нулю визначників

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \text{ та } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

встановлюємо колінеарність точок A, B, C та A, B, D, і, як наслідок, усієї четвірки. Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{cases} 1 = \alpha - 2\beta, \\ 0 = -\alpha + \beta, \\ -5 = 2\alpha + 3\beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 = \alpha' - 2\beta', \\ 2 = -\alpha' + \beta', \\ 1 = 2\alpha' + 3\beta'. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи (вони сумісні в силу колінеарності точок), отримуємо $\alpha = \beta = -1, \alpha' = -1, \beta' = 1$ і

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{-1}{-1} : \frac{1}{-1} = -1.$$

Задача 6. Задано прямі $a(2:1:0), b(0:1:3), c(2:0:-3)$. Перевірити, чи належать ці прямі одному пучку, та знайти у пучку пряму d таку, щоб $(abcd) = -\frac{1}{3}$.

Розв'язування. Належність прямих a, b, c одному пучку перевіряється з виконання умови:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

За означенням подвійного відношення маємо $-\frac{1}{3} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$. За аналогією з попереднім прикладом для знаходження α і β розв'язуємо систему

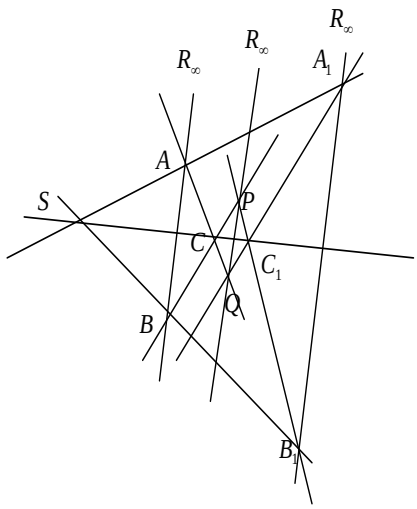
$$\begin{cases} 2 = 2\alpha, \\ 0 = \alpha + \beta, \\ -3 = 3\beta, \end{cases}$$

звідки $\alpha = 1,\ \beta = -1$. Тому $-\frac{1}{3} = \frac{-1}{1} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ і $\frac{\beta'}{\alpha'} = 3$. Поклавши $\alpha' = 1,\ \beta' = 3$, з маємо

$$d = (2, 1, 0) + 3(0, 1, 3) = (2, 4, 9).$$

Задача 7. Побудувати конфігурацію Дезарга, якщо точка $R_\infty = (AB) \bigcap (A_1B_1)$ – невласна.

Розв'язування. Якщо трикутники A, B, C та A_1, B_1, C_1 такі, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 належать одному пучку, $(AB) \parallel (A_1B_1)$, то точки $P = (BC) \cap (B_1C_1)$ та $Q = (AC) \cap (A_1C_1)$ лежать на прямій, паралельній прямим AB та A_1B_1.



3.8. Диференціальна геометрія і топологія. Зразки відповідей

Задача 1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x\ln x + 1$ в точці $A(1,1)$.

Розв'язання.

Крива задана рівнянням виду $y = f(x)$, тому знайдемо похідну $y' = \ln x + 1$ і обчислимо її значення в точці *A*: $y'(1) = \ln 1 + 1 = 1$.

Тоді рівняння дотичної матиме вид

$$y - 1 = x - 1,$$
$$x - y = 0.$$

А рівняння нормалі

$$y - 1 = -(x - 1),$$
$$x + y - 2 = 0.$$

Відповідь: $x - y = 0$; $x + y - 2 = 0$.

Задача 2. Знайти рівняння дотичної до кривої $\bar{r} = \left(\frac{t^4}{4}; \frac{t^3}{3}; \frac{t^2}{2}\right)$ в точці $A = \left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання.

$$\overline{r} = \left(\frac{t^4}{4}; \frac{t^3}{3}; \frac{t^2}{2} \right),$$

$$\overline{r}'(t) = (t^3, t^2, t).$$

Знайдемо t_0

$$\begin{cases} \frac{t_0^4}{4} = \frac{1}{4} \\ \frac{t_0^3}{3} = -\frac{1}{3} \\ \frac{t_0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, $t_0 = -1$.

Тоді $\overline{r}'(t_0) = (-1;1;-1)$ і рівняння дотичної

$$\frac{x - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}.$$

Відповідь: $\frac{x - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{y + \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}$.

Якщо ж крива задана рівняннями виду $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$, то рівняння дотичної до неї виглядає так

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ \Phi'_z & \Phi'_x \end{vmatrix}} \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}}. \qquad (2)$$

Задача 3. Знайти довжину гіперболічної гвинтової лінії $\overline{r}(t) = (acht, asht, at)$ між точками, де $t = 0$ і $t = t_0$.

Розв'язання.

$x'_t = asht$, $y'_t = acht$, $z'_t = a$.

$x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2 = a^2 sh^2 t + a^2 ch^2 t + a^2 = a^2(sh^2 t + ch^2 t + 1) = a^2(ch^2 t + (sh^2 t + 1)) = a^2(ch^2 t + ch^2 t) =$
$= 2a^2 ch^2 t.$

$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = a\sqrt{2}cht$.

$$S = \int_0^{t_0} a\sqrt{2}chtdt = a\sqrt{2}sht\Big|_0^{t_0} = a\sqrt{2}(sht_0 - sh(0)) = a\sqrt{2}sht_0.$$

Отже, $S = a\sqrt{2}sht_0$.

Відповідь: $a\sqrt{2}sht_0$.

Задача 4. Знайти довжину лінії $\begin{cases} x^3 = 3a^2 y \\ 2xy = a^2 \end{cases}$ між площинами $y = \dfrac{a}{3}$ і $y = 9a$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння даної лінії в параметричному виді

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^3}{3a^2} \\ z = \dfrac{a^2}{2t} \end{cases}.$$

Тоді

$$x'_t = 1,\ y'_t = \frac{t^2}{a^2},\ z'_t = -\frac{a^2}{2t^2}.$$

$$x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t = 1 + \frac{t^4}{a^4} + \frac{a^4}{4t^4} = \frac{4a^4t^4 + 4t^8 + a^8}{4a^4t^4} = \left(\frac{2t^4 + a^4}{2a^2t^2}\right)^2.$$

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t} = \frac{2t^4 + a^4}{2a^2t^2}.$$

Знайдемо точки перетину даної лінії з площинами

$$\gamma \cap \alpha:\ \frac{t^3}{3a^2} = \frac{a}{3} \Rightarrow t^3 = a^3 \Rightarrow t = a;$$

$$\gamma \cap \beta:\ \frac{t^3}{3a^2} = 9a \Rightarrow t^3 = 27a^3 \Rightarrow t = 3a.$$

$$S = \int_a^{3a} \frac{2t^4 + a^4}{2a^2t^2}dt = \frac{1}{2a^2}\left(\int_a^{3a} a^4 \frac{1}{t^4}dt + 2\int_a^{3a} t^2 dt\right) = \frac{1}{2a^2}\left(a^4\left(\frac{-2}{t^3}\right)\Bigg|_a^{3a} + \frac{2}{3}t^3\Bigg|_a^{3a}\right) = 9a.$$

Отже, $S = 9a$.

Відповідь: $9a$.

Задача 5. Знайти кривину і скрут кривої $\overline{r} = (2t, \ln t, t^2)$, $t > 0$ в точці $A(2,0,1)$.

Розв'язання.

Знайдемо t_0, що відповідає точці $A(2,0,1)$: $\begin{cases} 2 = 2t_0 \\ 0 = \ln t_0 \\ 1 = t_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 1 \\ t_0 = 1 \\ t_0 = \pm 1 \end{cases}$. Отже, $t_0 = 1$

Знайдемо

$\vec{r}' = (2, \frac{1}{t}, 2t)$, $\vec{r}_0' = (2,1,2)$,

$\vec{r}'' = (0, -\frac{1}{t^2}, 2)$, $\vec{r}_0'' = (0, -\frac{1}{t^2}, 2)$,

$\vec{r}''' = (0, -\frac{2}{t^2}, 0)$, $\vec{r}_0''' = (0,2,0)$.

$\left|\vec{r}_0'\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$,

$\vec{r}_0' \times \vec{r}_0'' = (4,-4,-2)$,

$\left|\vec{r}_0' \times \vec{r}_0''\right| = \sqrt{16+16+4} = 6$,

$(\vec{r}_0' \times \vec{r}'') \cdot \vec{r}_0''' = 4 \cdot 0 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = -8$,

$(\vec{r}_0' \times \vec{r}'')^2 = \left|\vec{r}_0' \times \vec{r}_0''\right|^2 = 36$.

Отже, $k = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$; æ = $\frac{-8}{36} = \frac{-2}{9}$.

Відповідь: $k = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$; æ = $\frac{-8}{36} = \frac{-2}{9}$.

Задача 6. Довести, що крива $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^2 + 2 \\ z = t^3 \end{cases}$ плоска.

Розв'язання.

Для того, щоб крива була плоскою, необхідно і досить, щоб її скрут у кожній точці дорівнював нулю. Тому

$\vec{r}' = (2t, 2t, 3t^2)$,

$\vec{r}'' = (2, 2, 6t)$,

$\vec{r}''' = (0, 0, 6)$.

Таким чином

$$\vec{r}' \cdot \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = \begin{vmatrix} 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2t & 2t \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6(4t - 4t) = 0$$

Отже, дана крива є плоска.

Відповідь: дана крива є плоска.

Задача 7. Знайти рівняння головної нормалі та спрямної площини для кривої $\overline{r}=(t,t^2,e^t)$ в точці $M(0;0;1)$.

Розв'язання.

$\overline{r}'=(1,2t,e^t)$, $\overline{r}''=(0,2,e^t)$.

Знайдемо t_0, що відповідає точці $M(0;0;1)$

$$\begin{cases} x_0=t_0 \\ y_0=t_0^2 \\ z=e^{t_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=t_0 \\ 0=t_0^2 \\ 1=e^{t_0} \end{cases} \Rightarrow t_0=0.$$

Тоді

$\overline{r}_0'=(1,0,1)$, $\overline{r}_0''=(0,2,1)$,

$\overline{r}_0'\times\overline{r}_0''=(-2,-1,2)$, $(\overline{r}_0'\times\overline{r}_0'')\times\overline{r}_0'=(-1,4,1)$.

Отже, матимемо

$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ – рівняння головної нормалі,

$-1\cdot(x)+4y+1\cdot(z-1)=0$,

$x-4y-z+1=0$ – рівняння спрямної площини.

Відповідь: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{1}$, $x-4y-z+1=0$.

Задача 8. Знайти рівняння нормальних площин кривої $\overline{r}=(t,t^2,t^3)$, що проходять через точку $A(0;3;0)$.

Розв'язання.

Знайдемо похідну $\overline{r}'=(1,2t,3t^2)$.

Рівняння нормальної площини даної кривої у довільній точці матиме вид

$$(x-t)+2t(y-t^2)+3t^2(z-t^3)=0.$$

Оскільки ця площина проходить через точку $A(0;3;0)$, то

$$(0-t)+2t(3-t^2)+3t^2(0-t^3)=0 \text{ або } 3t^5+2t^3-5t=0.$$

Це рівняння має корені $t_1=0$, $t_2=-1$, $t_3=1$. Значенням t відповідають площини

$x=0$, $x-2y+3z+6=0$, $x+2y+3z-6=0$.

Відповідь: $x=0$, $x-2y+3z+6=0$, $x+2y+3z-6=0$.

Задача 9. В якій точці параболи $y^2=8x$ радіус кривини дорівнює $\dfrac{125}{16}$?

Розв'язання.

Радіус кривини $R=\frac{1}{k}=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}$.

Знайдемо y'_x, y''_x.

$y^2=8x$, $2yy'=8$, $y'=\frac{4}{y}$, $y''=-\frac{4}{y^2}\cdot y'=\frac{16}{y^3}$.

Таким чином

$$R=\frac{\left(1+\frac{16}{y^2}\right)^{3/2}}{\frac{16}{y^3}}=\frac{\sqrt{(16+y^2)^3}}{16},$$

тоді $\sqrt{(16+y^2)^3}=125$, $(16+y^2)^3=125^2$, $16+y^2=25$, $y=\pm 3$, $x=\frac{9}{8}$.

Отже, існує дві точки $A\left(\frac{9}{8},3\right)$ і $B\left(\frac{9}{8},-3\right)$, що задовольняють умову задачі.

Відповідь: $A\left(\frac{9}{8},3\right)$, $B\left(\frac{9}{8},-3\right)$.

Задача 10. Знайти параметричне рівняння лінії, знаючи її натуральне рівняння $\frac{1}{k^2}=16a^2-S^2$.

Розв'язання.

Знайдемо кривину k як функцію від S

$$k=\frac{1}{\sqrt{16a^2-S^2}}.$$

Визначимо кут α дотичної до кривої з віссю OX

$$\alpha=\int_0^S\frac{1}{\sqrt{16a^2-S^2}}ds=\arcsin\frac{S}{4a}.$$

Таким чином,

$$\alpha=\arcsin\frac{S}{4a}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{S}{4a}\Rightarrow S=4a\sin\alpha\Rightarrow ds=4a\cos\alpha d\alpha.$$

Тоді

$$x=\int_0^S\cos\alpha ds=4a\int_0^t\cos^2\alpha d\alpha=2a\int_0^t(1+\cos 2\alpha)d\alpha=2a\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\Big|_0^t=a(2t+\sin 2t),$$

$$y=4a\int_0^S\sin\alpha\cos\alpha d\alpha=2a\int_0^t\sin 2\alpha d\alpha=a(-\cos 2\alpha)\Big|_0^t=a(-\cos 2t+1)=a(1-\cos 2t).$$

Звідси

$$\begin{cases} x = a(2t + \sin 2t) \\ y = a(1 - \cos 2t) \end{cases}$$ – параметричні рівняння даної кривої.

Відповідь: $\begin{cases} x = a(2t + \sin 2t) \\ y = a(1 - \cos 2t). \end{cases}$

Задача 11. Знайти особливі точки та визначити їх характер для кривої $x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$.

Розв'язання.

Знайдемо $F_x = 3x^2 - 2x$, $F_y = 3y^2 - 2y$.

Система $\begin{cases} x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0 \\ x(3x - 2) = 0 \\ y(3y - 2) = 0 \end{cases}$ має розв'язок (0,0).

Отже, точка $O(0,0)$ – особлива точка.

Визначимо характер цієї особливої точки

$$F_{xx} = 6x - 2, \quad F_{xx}^0 = -2, \; F_{yy} = 6y - 2, \; F_{yy}^0 = -2, \; F_{xy} = 0, \quad F_{xy}^0 = 0.$$

Дискримінант в цій точці буде рівний

$$\delta_0 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0.$$

Тому початок координат є ізольованою точкою кривої.

Задача 12. Знайти еволюту еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Розв'язання.

Оскільки координати центра стичного кола еліпса ми знаходили раніше, то матимемо

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ \tilde{y} = -\dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t \end{cases}.$$

Оскільки $a^2 - b^2 = c^2$, то

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ \tilde{y} = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}.$$

Визначимо з цих рівнянь параметр t

$$\begin{cases} a\tilde{x} = c^2\cos^3 t \\ b\tilde{y} = -c^2\sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a\tilde{x})^{2/3} = c^{4/3}\cos^2 t \\ (b\tilde{y})^{2/3} = c^{4/3}\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow (a\tilde{x})^{2/3} + (b\tilde{y})^{2/3} = c^{4/3}.$$

Замінивши $\tilde{x}$ та $\tilde{y}$ на x та y матимемо

$$(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=c^{4/3}$$ – рівняння еволюти еліпса.

Ця крива нагадує астроїду і отримується з неї розтягом по вертикалі.

Задача 13. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=x^4-2xy^3$ в точці $M(0,-1,0)$.

Розв'язання.

Знайдемо похідні

$f_x=4x^3-2y^3$, $\qquad f_x^0=2$,

$f_y=-6xy^2$, $\qquad f_y^0=0$.

Отже, рівняння дотичної площини має вид

$$z=2x \text{ або } 2x-z=0,$$

а нормалі

$$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1}.$$

Відповідь: $z=2x$ або $2x-z=0$; $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1}$.

Задача 14. Дано поверхню $x^2+3y^2+z^2=1$. Знайти рівняння дотичної пло-щини, паралельної до площини $2x+4y+z=0$.

Розв'язання.

$F(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2-1$.

$F_x=2x$, $\qquad F_x^0=2x_0$,

$F_y=6y$, $\qquad F_y^0=6y_0$,

$F_z=2z$, $\qquad F_z^0=2z_0$.

Рівняння дотичної площини запишеться у виді

$$2(x-x_0)x_0+6(y-y_0)y_0+2(z-z_0)z_0=0.$$

Оскільки точка дотику $M(x_0,y_0,z_0)$ належить поверхні, то

$$x_0^2+3y_0^2+z_0^2-1=0 \qquad (*)$$

З умови паралельності дотичної площини і площини $2x+4z+y=0$ випли-ває, що $\frac{x_0}{2}=\frac{6y_0}{4}=\frac{z_0}{1}=k$. Звідки $x_0=2k$, $y_0=\frac{2}{3}k$, $z_0=k$.

Тоді рівняння (*) матиме вид

$$4k^2+3\cdot\frac{4}{9}k^2+k^2=1,$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{12}{31}} = \pm 2\sqrt{\frac{3}{31}}.$$

Тому $x_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$, $y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{9}}$, $z_0 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$.

Підставивши ці значення x_0, y_0, z_0 у рівняння (*), одержимо остаточно рівняння дотичної площини

$$2x + 4y + z = \frac{\sqrt{93}}{3} \text{ і } 2x + 4y + z = -\frac{\sqrt{93}}{3}.$$

Отже, умову задачі задовольняє дві площини.

Задача 15. Знайти першу квадратичну форму гелікоїда $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$.

Розв'язання.

Скористаємося формулою (1):

$\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$,

$\overline{r_u} = (\cos v, \sin v, 0)$,

$\overline{r_v} = (-u\sin v, u\cos v, a)$,

$E = \overline{r_u}^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$,

$F = \overline{r_u} \cdot \overline{r_v} = -u\sin v\cos v + u\cos v\sin v + a \cdot 0 = 0$,

$G = \overline{r_v}^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2$.

Тоді

$$I = ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Відповідь: $I = ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

Задача 16. Знайти кут між кривими $v = u + 1$, $v = 3 - u$ на поверхні $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, u^2)$.

Розв'язання.

Знайдемо:

1) точку перетину даних ліній:

$$\begin{cases} v = u + 1 \\ v = 3 - u \end{cases} \Rightarrow u = 1, v = 2.$$

Отже $A(u_0, x_0) = A(1,2)$.

2) диференціали по першій і другій кривих:

$v = u + 1.$	$v = 3 - u.$
$dv = du.$	$\delta v = -\delta u.$

3) коефіцієнти першої квадратичної форми:

$\overline{r_u} = (\cos v, \sin v, 2u)$,

$\overline{r_v} = (-u\sin v, u\cos v, 0)$,

$E = 1 + 4u^2$, $F = 0$, $G = u^2$.

Тоді згідно формули (4) матимемо

$$\cos\varphi = \frac{(1+4u_0^2)du\delta u - u_0^2 du\delta u}{\sqrt{(1+4u_0^2)du^2 + u^2du^2}\cdot\sqrt{(1+4u_0^2)\delta u^2 + u^2\delta u^2}} = \frac{(1+3u_0^2)du\delta u}{\sqrt{1+5u_0^2}du\cdot\sqrt{1+5u_0^2}\delta u^2} = \frac{1+3u_0^2}{1+5u_0^2} =$$

$$= \frac{1+3}{1+5} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

Задача 17. Знайти другу квадратичну форму поверхні $z = 2x^2 - 3y^2$.

Розв'язання.

$z_x = 4x$, $z_y = -6y$, $z_{xx} = 4$, $z_{yy} = -6$, $z_{xy} = 0$, $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+16x^2+36y^2}$.

Тоді

$$L = \frac{4}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}},\ M = 0,\ N = \frac{-6}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}.$$

Таким чином друга квадратична форма для даної поверхні має вид

$$ds^2 = \frac{4}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}dx^2 - \frac{-6}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}dy^2.$$

Відповідь: $ds^2 = \frac{4}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}dx^2 - \frac{-6}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}dy^2$.

Задача 18. Знайти повну і середню кривини поверхні $\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, u+v)$.

Розв'язання.

Обчислимо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм

$\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, u+v)$,

$\overline{r_u} = (\cos v, \sin v, 1)$,

$\overline{r_v} = (-u\sin v, u\cos v, 1)$,

$\overline{r_{uu}} = (0, 0, 0)$,

$\overline{r_{uv}} = (-\sin v, \cos v, 0)$,

$\overline{r_{vv}} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$.

Тоді

$E=2$, $F=1$, $G=u^2+1$, $EG-F^2=2u^2+1, L=0$, $M=\dfrac{-1}{\sqrt{2u^2+1}}$, $N=\dfrac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}$.

Таким чином повна та середня кривини будуть відповідно рівні

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\dfrac{-1}{\sqrt{2u^2+1}}}{2u^2+1}=-\frac{1}{\left(2u^2+1\right)^2},$$

$$H=\frac{EN-2FM+2GL}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{\dfrac{2u^2}{\sqrt{2u^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{2u^2+1}}}{2\left(2u^2+1\right)}=\frac{u^2+1}{\sqrt{\left(2u^2+1\right)^3}}.$$

Відповідь: $K=-\dfrac{1}{\left(2u^2+1\right)^2}$, $H=\dfrac{u^2+1}{\sqrt{\left(2u^2+1\right)^3}}$.

Задача 19. Знайти лінії кривини гіперболічного параболоїда $z=xy$.

Розв'язання.

Знайдемо похідні і коефіцієнти I і II квадратичних форм

$f'_x=y$, $f'_y=x$, $f''_{xx}=0$, $f''_{xy}=1$, $f''_{yy}=0$, $E=1+y^2$, $F=xy$, $G=1+x^2$, $L=0$,

$M=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $N=0$.

Тоді диференціальне рівняння лінії кривини матиме вид

$$(1+y^2)dx^2-(1+x^2)dy^2=0.$$

Звідси матимемо

$$\sqrt{1+y^2}dx-\sqrt{1+x^2}dy=0 \text{ і } \sqrt{1+y^2}dx+\sqrt{1+x^2}dy=0.$$

Розв'яжемо ці рівняння:

$\sqrt{1+y^2}dx-\sqrt{1+x^2}dy=0$;

$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=0$;

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\ln C_1$;

$\ln\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}=\ln C_1$;

$\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}=C_1$.

$\sqrt{1+y^2}dx+\sqrt{1+x^2}dy=0$;

$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=0$;

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\ln C_2$;

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\ln C_2$;

$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=C_2$.

Отримали дві сім'ї ліній кривини даної поверхні.

Відповідь: $\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}=C_1$, $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=C_2$.

Задача 20. Знайти асимптотичні лінії гіперболічного параболоїда $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$.

Розв'язання.

Зайдемо похідні $f'_x=\dfrac{x}{a^2}$, $f'_y=-\dfrac{y}{b^2}$, $f''_{xx}=\dfrac{1}{a^2}$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=-\dfrac{1}{b^2}$.

Диференціальне рівняння асимптотичних ліній буде таким

$$\frac{dx^2}{a^2}-\frac{dy^2}{b^2}=0.$$

Тоді матимемо $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b}{a}$ і $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b}{a}$.

Звідси

$\int dy=\dfrac{b}{a}\int dx$ і $\int dy=-\dfrac{b}{a}\int dx$ – дві сім'ї асимптотичних ліній даної поверхні.

Відповідь: $\int dy=\dfrac{b}{a}\int dx$, $\int dy=-\dfrac{b}{a}\int dx$.

Задача 21. Чи є в R^3 відкритими сфера, множина точок поза кулею і всередині кулі?

Розв'язання.

В R^3 сфера не є відкрита, а дві інші множини є відкритими, бо околи їх точок містять точки цих множин.

Задача 22. Знайти внутрішність і замикання вказаних проміжків L на числовій прямій.

1) $[a,b]$; 3) $(a,b]$; 5) $[a,\infty)$; 7) (a,∞); 9) $(-\infty,\infty)$.

2) $[a,b)$; 4) (a,b); 6) $(-\infty,b]$; 8) $(-\infty,b)$;

Розв'язання.

1) $\overset{0}{L}=(a,b)$, $\overline{L}=L$;

2) $\overset{0}{L}=(a,b)$, $\overline{L}=[a,b]$;

3) $\overset{0}{L}=(a,b)$, $\overline{L}=[a,b]$;

4) $\overset{0}{L}=(a,b)$, $\overline{L}=[a,b]$;

5) $\overset{0}{L}=(a,\infty)$, $\overline{L}=[a,\infty)$;

6) $\overset{0}{L}=(-\infty,b)$, $\overline{L}=(-\infty,b]$;

7) $\overset{0}{L}=(a,\infty)$, $\overline{L}=[a,\infty)$;

8) $\overset{0}{L}=(-\infty,b)$, $\overline{L}=(-\infty,b]$;

9) $\overset{0}{L}=(-\infty,\infty)$, $\overline{L}=(-\infty,\infty)$.

3.9. Аналітична геометрія. Рекомендована література.

1. Александров П.С., Нецветаев. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 234 с.
2. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии. – М.: Просвещение, 1973, ч.1. – 187 с.
3. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.1. – М.: Просвещение, 1986 (1973). – 156 с.
4. Базылев В.Т, Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. Ч.1. – М.: Просвещение, 1974. – 189с.
5. Галь Ю., Добош У., Волянська І. Аналітична геометрія. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2013. – 164 с.
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969. – 253 с.
7. Погорелов О.В. Геометрия: Стереометрія: Підруч. для 10 – 11 кл. серед. шк. – 5-те вид. – К .: Освіта, 2000. – 128 с.
8. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія: Навч.посібник – Суми: Університетська книга, 2004. – 296с.

3.10. Проективна геометрія та основи геометрії. Рекомендована література.

Основна:

1. Галь Ю., Золота О. Проективна геометрія та основи геометрії. Дрогобич, редакційно-видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка. 2011. – 126 с.
2. Галь Ю., Золота О. Методичні матеріали до самостійної роботи з проективної геометрії та основ геометрії. Дрогобич, редакційно-видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка. 2012. – 27 с.
3. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., «Наука». 1971. – 576 с.
4. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. М., УЧПЕДИЗ. 1950. – 127 с.

Додаткова:

5. Певзнер С. Л. Проективная геометрия. М., «Просвещение». 1980. – 128 с.
6. Певзнер С. Л., Цаленко М. М. Задачник-практикум по проективной геометрии. М., «Просвещение». 1982. – 80 с.

3.11. Диференціальна геометрія і топологія. Рекомендована література.

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 234 с.
2. Галь Ю.М., Добош У.П., Корнейчук І.В. Диференціальна геометрія і топологія: Навчально-методичний посібник. – Дрогобич: РВВ ДДПУ ім.І.Франка, 2009. – 84 с.
3. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: 1958. – 165с

Розділ 4. Методика навчання математики в школі та елементарна математика

4.1. Загальні положення.

Випускники повинні володіти навичками розв'язання текстових арифметичних задач, лінійних, квадратних, раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь, нерівностей та їхніх систем, знати лінійні, квадратичні, степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції, їхні основні властивості, геометричні фігури на площині та в просторі та їхні властивості, координати і вектори на площині та в просторі.Екзаменовані повинні володіти теоретичними поняттями педагогіки та методики навчання математики; усвідомлювати та вміти розв'язувати типові завдання, що виникають перед вчителем математики у процесі його педагогічної діяльності; вміння характеризувати методичні особливості навчальних тем та усвідомлювати кінцеві цілі їх вивчення; повинен уміти аналізувати й порівнювати різні навчальні програми з математики, співвідносити мету і завдання вивчення математики з цілями і завданнями вивчення кожної навчальної теми; готувати і проводити уроки математики в основній школі; проектувати реалізацію зв'язків вивчення математики з іншими навчальними предметами, а також уміти забезпечувати розвиток учнів у процесі навчання математики.

4.2. Методика навчання математики в школі. Основні факти і поняття.

Компоненти методичної системи навчання математики

1. Методика навчання математики як наука і як навчальна дисципліна у педвузі. Предмет, цілі, зміст і структура курсу. Математика в школі як навчальний предмет. Цілі та зміст навчання математики у загальноосвітній школі.
2. Діяльнісний підхід у навчанні математики. Загальнодидактичні принципи навчання математики. Роль загальних розумових дій і прийомів розумової діяльності при навчанні математики.
3. Внутріпредметні та міжпредметні зв'язки при навчанні математики. Рівнева і профільна диференціація та проблеми їх впровадження на уроках математики.
4. Методи навчання математики. Класифікація методів навчання.
5. Організаційні форми навчання математики. Типи уроків математики. Лекційно-практична система навчання математики. Організація самостійної роботи учнів на уроках математики.
6. Контроль у навчанні математики. Види, форми, методи та засоби контролю.
7. Засоби навчання математики. Підручники з математики. Навчальне обладнання та методика його використання. Використання нових інформаційних технологій при навчанні математики.
8. Математичні поняття та їх види. Первісні, означувані поняття та поняття що вводяться описово. Методика формування математичних понять. Узагальнення і класифікація понять.
9. Твердження, аксіоми теореми у шкільному курсі математики. Види теорем. Необхідні та достатні умови. Методи доведення. Методика навчання учнів доведенню математичних тверджень.
10. Задачі у навчанні математики. Класифікація математичних задач. Функції задач у навчанні математики. Характеристика основних методів і способів розв'язування задач. Методика навчання учнів розв'язуванню задач.
11. Прикладна спрямованість навчання математики. Метод математичного моделювання.
12. Факультативні заняття, їх мета, зміст, форми проведення. Позакласна робота з математики: математичні гуртки, вечори, олімпіади, тижні математики, тощо.
13. Інформаційно-комунікаційні технології навчання математики.

Методика навчання математики в 5-6 класах та алгебри і геометрії в 7-9 класах.

1. Математика у 5-6 класах. Цілі та зміст вивчення. Вимоги до математичної підготовки учнів. Пропедевтика вивчення алгебри в курсі математики 5-6 класів.
2. Повторення, систематизація, узагальнення і поглиблення знань про натуральні числа та дії над ними. Подільність натуральних чисел.
3. Методика вивчення десяткових дробів.
4. Методика вивчення додатних і від'ємних чисел.
5. Алгебра як наука і навчальний предмет. Цілі та зміст навчання алгебри. Вимоги до математичної підготовки учнів. Аналіз альтернативних підручників з алгебри для 7-9 класів.
6. Методика вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів.
7. Вивчення рівнянь та систем рівнянь в основній школі. Вивчення нерівностей та систем нерівностей в основній школі.
8. Вивчення функцій у 7-9 класах. Введення поняття функції. Різні означення функції. Функціональна пропедевтика.
9. Елементи теорії множин та комбінаторики у шкільному курсі математики. Методика вивчення початків теорії ймовірності та елементів статистики в основній школі.
10. Геометрія як навчальний предмет. Методичні напрямки побудови шкільного курсу геометрії. Логічна побудова шкільного курсу геометрії. Мета і завдання вивчення геометрії в основній школі. Аналіз альтернативних підручників з геометрії для 7-9 класів.
11. Методика проведення перших уроків геометрії. Найпростіші геометричні фігури. Методика введення аксіом та навчання доведенням перших теорем.
12. Ознака рівності трикутників.
13. Вивчення геометричних побудов. Поняття "геометрична побудова", "геометричне місце точок". Основні побудови. Методи розв'язування задач на побудову. Методика навчання розв'язування задач на побудову.
14. Чотирикутники в курсі геометрії. Методи вивчення многокутників. Вписані та описані многокутники.

4.3. Методика навчання математики в школі. Тестові завдання з вибором декількох правильних відповідей.

1. Основними питаннями методики навчання математики є:

а) зміст навчання; б) розробка нормативних документів; в) мета навчання; г) методи навчання; д) концепція шкільної освіти; е) засоби навчання.

2. Зміст шкільної математичної освіти це:

а) математичні знання; б) загальноосвітні навички й уміння; в) логічне мислення; г) логічне мислення; д) досвід творчої діяльності; е) навички самоконтролю.

3. Під час складання програми з математики використовують зміст:

а) підручника; б) програми вивчення дисципліни; в) Державної національної програми "Освіта" (Україна XXI ст.); г) тестів зовнішнього незалежного оцінювання; д) базовим навчальним планом; е) методичної літератури; є) Державного стандарту базової й неповної загальної середньої освіти; ж) концепції профільної освіти.

4. Під час складання календарного плану вчитель використовує зміст:

а) підручника; б) програми вивчення дисципліни; в) Державної національної програми "Освіта" (Україна XXI ст.); г) тестів зовнішнього незалежного оцінювання; д) базовим навчальним планом; е) методичної літератури; є) Державного стандарту базової й неповної загальної середньої освіти; ж) концепції профільної освіти.

5. Зміст шкільної математичної освіти реалізується, структурується й конкретизується в:

а) підручниках та посібниках з математики; б) навчальних планах та програмах; в) держстандартах та концепції математичної освіти; г) конспектах уроків; д) тематичних планах.

6. Виберіть із нижченаведених словосполучень ті, які визначають зміст поняття "методу навчання ":

а) сукупність прийомів навчання; б) засоби навчальної роботи вчителя; в) шляхи по якому веде вчитель учнів; г) способи організації навчально-пізнавальної діяльності учнів; д) способи роботи учнів на кроках.

7. До наочних методів навчання відносять:

а) ілюстрація; б) схеми і таблиці; в) вправи; г) лабораторні роботи і досліди; д) розповідь, бесіда; е) спостереження; є) пояснення, лекція.

8. До словесних методів навчання належать:

а) ілюстрація; б) схеми і таблиці; в) вправи; г) лабораторні роботи і досліди; д) розповідь, бесіда; е) спостереження; є) пояснення, лекція.

9. До практичних методів навчання відносять:

а) дослід; б) евристика; в) опитування; г) використання вправ; д) дослідницько-пошуковий; е) виготовлення моделей; є) самостійна робота; ж) проблемний виклад.

10. До частково-пошукових методів навчання відносять:

а) розповідь, пояснення; б) евристична бесіда; в) відтворення учнями знань; г) дослідження; д) самостійна робота над малознайомим текстом; е) розв'язування тренувальних вправ.

11. За характером пізнавальної діяльності виділяють такі методи навчання:

а) використання знань; б) пояснювально-ілюстративний; в) набуття нових знань; г) формування вмінь і навичок; д) проблемного викладу; е) закріплення знань, вмінь і вмінь; є) лекційні; ж) репродуктивні.

12. За дидактичною метою виділяють такі методи навчання:

а) використання знань; б) пояснювально-ілюстративний; в) набуття нових знань; г) формування вмінь і навичок; д) проблемного викладу; е) закріплення знань, вмінь і вмінь; є) лекційні; ж) репродуктивні.

13. Вкажіть основні принципи навчання:

а) доступності; б) оптимізації; в) активності; г) міжпредметних зв'zprsd; д)міцності; е) послідовності.

14. Проблемне навчання забезпечується такими методами:

а) дослід; б) евристика; в) опитування; г) використання вправ; д) дослідницько-пошуковий; е) виготовлення моделей; є) самостійна робота; ж) проблемний виклад.

15. До репродуктивних методів навчання належать:

а) розповідь, пояснення; б) евристична бесіда; в) відтворення учнями знань; г) дослідження; д) самостійна робота над малознайомим текстом; е) розв'язування тренувальних вправ.

16. Виділення міжпонятійних зв'язків поняття дозволяє:

а) розкрити суттєві і несуттєві властивості поняття; б) продемонструвати, як використовуєтся це поняття; в) виділити взаємозв'язки цього поняття з іншим

навчальними матеріалом; г) встановити залежності між ознаками поняття; д) розкрити зміст поняття; е) об'єднати поняття деякої частини навчального матеріалу в цілісну систему.

17. Виділення внутріпонятійних зв'язків поняття дозволяє:

а) розкрити суттєві і несуттєві властивості поняття; б) продемонструвати, як використовується це поняття; в) виділити взаємозв'язки цього поняття з іншим навчальними матеріалом; г) встановити залежності між ознаками поняття; д) розкрити зміст поняття; е) об'єднання понять деякої частини навчального матеріалу в цілісну систему.

18. Умови реалізації рівневої диференціації навчання:

а) навчаються в одному класі; б) розподіляються за різними класами; в) навчальний матеріал диференціюється за змістом; г) навчальний матеріал диференціюється за рівнями навчальних досягнень; д) передбачає вільний перехід із групи в групи;е) групи учнів є незмінними.

19. Умови реалізації профільної диференціації навчання:

а) навчаються в одному класі; б) розподіляються за різними класами; в) навчальний матеріал диференціюється за змістом; г) навчальний матеріал диференціюється за рівнями навчальних досягнень; д) передбачає вільний перехід із групи в групи;е) групи учнів є незмінними.

20. Основними етапами абстрагування є:

а) виділити ті властивості, від яких потрібно відокремитись у відповідності до поставленої мети;

б) порівняти властивості або відношення досліджуваного об'єкту з подібним відомим;

в) визначити мету;

г) розглянути властивості або відношення досліджуваного об'єкту відповідно мети;

д) знайти відокремлені властивості у об'єктів дослідження;

е) якщо досліджуваний об'єкт не має властивостей, що притаманні об'єкту, з яким ми його порівнюємо, спробувати відшукати;

є) зробити висновок.

21. Порівняння, як логічний прийом мислення використовується переважно для:

а) встановлення істотних властивостей об'єкта; б) перевірки правильності виконання вправ;

в) узагальнення та систематизації матеріалу; г) перенесення способу розв'язання з однієї задачі на іншу;д) вивчення змісту теорем, означень; е)відшукання розв'язків задачі та доведення теорем.

22. Основними етапами аналогії є:

а) виділити ті властивості, від яких потрібно відокремитись у відповідності до поставленої мети;

б) порівняти властивості або відношення досліджуваного об'єкту з подібним відомим;

в) визначити мету;

г) розглянути властивості або відношення досліджуваного об'єкту відповідно мети;

д) знайти відокремлені властивості у об'єктів дослідження;

е) якщо досліджуваний об'єкт не має властивостей, що притаманні об'єкту, з яким ми його порівнюємо, спробувати відшукати;
є) зробити висновок.

23. Аналіз і синтез – розумові операції, що переважно використовують для:
а) встановлення істотних властивостей об'єкта; б) перевірки правильності виконання вправ;
в) узагальнення та систематизації матеріалу; г) перенесення способу розв'язання з однієї задачі на іншу; д) вивчення змісту теорем, означень; е)відшукання розв'язків задачі та доведення теорем.

4.4. Методика навчання математики в школі. Тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді

1. За допомогою чого розкривається зміст поняття?
а) означення поняття; *в) перелічення властивостей поняття;*
б) визначення обсягу поняття; *г) терміну поняття.*

2. Що розуміється під обсягом поняття?
а) перелік всіх об'єктів, що належать даному поняттю;
б) безліч об'єктів, що позначаються одним терміном;
в) множину предметів, що відображає дане поняття;
г) множину ознак, які є спільними для групи об'єктів, що належать даному поняттю.

3. Якщо в означенні перераховуються характерні властивості поняття, то це…
а) родо-видове означення; *в) рекурентне означення;*
б) описове означення; *г) генетичне означення.*

4. Якщо в означенні поняття вказується найближчий рід та видові відмінності, то це…
а) родо-видове означення; *в) рекурентне означення;*
б) описове означення; *г) генетичне означення.*

5. Логічна дія вході якої ми виділяємо властивості об'єкта з умови належності його до певного поняття називається:
а) класифікація; *в) поділ поняття;*
б) підведення під поняття; *г) відшукання наслідків.*

6 Логічна дія вході якої ми перевіряємо наявність у об'єкта певної системи істотних властивостей і на їх основі робимо висновок про належність (або неналежність) об'єкта даному поняттю називається:
а) класифікація; *в) поділ поняття;*
б) підведення під поняття; *г) відшукання наслідків.*

7. Твердження з порівняно коротким доведенням, які цікавлять нас тільки у зв'язку з доведенням інших теорем називаються:
а) теоремою; *б) висловлюванням;* *в) лемою;* *г) аксіомою.*

8. Твердження, правильність якого можна довести в даній аксіоматичній системі називається:
а) теоремою; *б) висловлюванням;* *в) лемою;* *г) аксіомою.*

9. Якщо заперечити умову і висновок твердження оберненого до даної теореми, то ми отримаємо твердження:

а) протилежне даному; *в) протилежне оберненому;*

б) обернене даному; *г) рівносильне даному.*

10. Якщо поміняти місцями умову і висновок даної теореми, то ми отримаємо твердження:

а) протилежне даному; *в) протилежне оберненому;*

б) обернене даному; *г) рівносильне даному.*

11. Аргументом, як однією з частин доведення теореми називається:

а) судження, істинність якого необхідно довести.

б) судження, які наводиться для доведення тези.

в) спосіб логічного зв'язку тези з аргументом;

г) процес думки, що полягає в обґрунтуванні істинності деякого твердження

12. Демонстрацією, як однією з частин доведення теореми називається:

а) судження, істинність якого необхідно довести.

б) судження, які наводиться для доведення тези.

в) спосіб логічного зв'язку тези з аргументом;

г) процес думки, що полягає в обґрунтуванні істинності деякого твердження

13 Суть аналітико-синтетичного методу доведення теорем і розв'язування задач полягає в тому, що ми:

а) міркуємо від даних в умові до того, що потрібно довести або знайти;

б) міркуємо від вимоги до даних в умові;

в) перетворюємо вимогу і умову поперемінно з обох кінців;

г) доводячи твердження протилежне даному, приходимо до суперечності.

14. Суть синтетичного методу доведення теорем і розв'язування задач полягає в тому, що ми:

а) міркуємо від даних в умові до того, що потрібно довести або знайти;

б) міркуємо від вимоги до даних в умові;

в) перетворюємо вимогу і умову поперемінно з обох кінців;

г) доводячи твердження протилежне даному, приходимо до суперечності.

15. У залежності від співвідношення між умовою та вимогою «визначеними» називають задачі:

а) що мають одне або декілька розв'язань;

б) що мають нескінчену кількість розв'язань;

в) що мають зайві дані в умові;

г) що мають дані в умові, які не відповідають властивостям розглядуваних об'єктів;

16. У залежності від співвідношення між умовою та вимогою «суперечливими» називають задачі:

а) що мають одне або декілька розв'язань;

б) що мають нескінчену кількість розв'язань;

в) що мають зайві дані в умові;

г) що мають дані в умові, які не відповідають властивостям розглядуваних об'єктів;

17. Навчальні функції задач спрямовані на:

а) формування пізнавального інтересу, самостійності, культури математичної мови і т.п.

б) формування системи математичних знань, умінь і навичок;

в) розвиток мислення, просторової уяви, прийомів розумової діяльності;

г) встановлення рівня математичного та розумового розвитку.

18. Контролюючі функції задач спрямовані на:

а) формування пізнавального інтересу, самостійності, культури математичної мови і т.п.

б) формування системи математичних знань, умінь і навичок;

в) розвиток мислення, просторової уяви, прийомів розумової діяльності;

г) встановлення рівня математичного та розумового розвитку.

19. За мірою індивідуалізації роботи учнів форми організації навчання розподіляють на:

а) теоретичні, практичні, трудові, комбіновані;

б) індивідуальні; колективно-групові, індивідуально-колективні;

в) урочні, позаурочні шкільні, позашкільні;

г) вступні заняття, заняття з поглиблення знань, практичні заняття, заняття з контролю;

20. За дидактичною метою форми організації навчання розподіляють на:

а) теоретичні, практичні, трудові, комбіновані;

б) індивідуальні; колективно-групові, індивідуально-колективні;

в) урочні, позаурочні шкільні, позашкільні;

г) вступні заняття, заняття з поглиблення знань, практичні заняття, заняття з контролю знань і т.д.;

4.5. Методика навчання математики в школі. Завдання для перевірки практичних умінь та навичок.

1. Для встановлення внутріпредметних зв'язків виділіть структурні компоненти поняття та складіть завдання для засвоєння учнями цих зв'язків:

a) *«вписаний кут у коло»;*
b) *«бісектриса трикутника»;*
c) *«медіана трикутника»;*
d) *«середня лінія трикутника».*

2. Виконайте логіко-математичний аналіз означення поняття (вкажіть термін, рід, істотні ознаки)

a) *Кожна пара чисел, яка перетворює рівняння з двома змінними у правильну рівність, називається розв'язком цього рівняння.*
b) *Функція називається зростаюча, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.*
c) *Два вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називаються тотожно рівними.*
d) *Геометричною прогресією називається послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число.*

3. Наведіть приклади, контрприклади та вільні об'єкти для понять;

a) *«середня лінія трапеції»;*
b) *«діаметр кола»;*
c) *«бісектриса кута»;*
d) *«дотична до кола».*

4. Перевірте, чи правильно виконана дія ділення поняття. Якщо так, за якою основою виконано ділення?

a) *прямокутники можуть бути рівносторонні та нерівносторонні;*
b) *трикутники діляться на різносторонні, рівнобедрені та рівносторонні;*
c) *функції бувають парні, непарні, загального виду;*
d) *раціональні числа бувають додатні та від'ємні;*
e) *чотирикутники діляться на прямокутники, ромби та квадрати;*
f) *трапеція може бути рівнобічна, прямокутна;*

5. Представте схематично у вигляді схеми-діаграми Ейлера-Венна співвідношення між обсягами наступних понять:

a) *лінійні рівняння; лінійні рівняння з параметром;*
b) *гострокутний трикутник, прямокутний трикутник; тупокутний трикутник;*
c) *невід'ємне число, недодатне число;*
d) *ромб, опуклий чотирикутник, паралелограм, трапеція*
e) *раціональне число, ірраціональне число;*

f) *квадратні рівняння, неповні квадратні рівняння;*

6. Вкажіть характер помилок допущений в означені понять та спосіб виправлення учня, що сформулював таке означення:

a) *Дві прямі, що не перетинаються, паралельні.*
b) *Фігура у якої всі сторони рівні ромб.*
c) *Корінь рівняння це значення, що приводить рівняння до правильної рівності.*
d) *Вписаним називається кут, сторони якого перетинають коло.*
e) *Простим називається число, що має тільки два дільники*
f) *Вираз, що складається з кількох одночленів називається многочленом.*
g) *Лінія, координати точок якої задовольняють рівність $y=kx+b$, є графіком лінійної функції.*

7. Виконайте логіко-математичний аналіз теореми (вкажіть роз'яснювальну частину, умову, вимогу, проста чи складена). Сформулюйте її в імплікативній формі.

a) *Медіана рівнобедреного трикутника проведена до основи є його висотою та бісектрисою.*
b) *Чотирикутник у якого дві сторони паралельні і рівні – паралелограм*
c) *Число ділиться на шість тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на два і на три.*
d) *Дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику*

8. Сформулюйте твердження використовуючи слова необхідно і достатньо:

a) *Якщо в опуклому чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180^0, то навколо нього можна описати коло.*
b) *Якщо при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 1800, то прямі паралельні.*
c) *Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений*
d) *Якщо похідна у точці a дорівнює нулю, то функція у цій точці має екстремум.*

9. Сформулюйте для даного твердження обернене, протилежне прямому, протилежне оберненому. Визначте їх істинність.

a) *Якщо пропорція правильна, то добуток її крайніх членів дорівнює добутку середніх.*
b) *Якщо кожний доданок ділиться на дане число, то і сума ділиться на це число.*
c) *Якщо кінці ламаної лежать у різних півплощинах відносно даної прямої, то ламана перетинає цю пряму.*
d) *Число a вважається більшим від числа b, якщо різниця (a- b) – додатне число*

10. Сформулюйте дидактичну мету. Вкажіть етапи такого уроку:

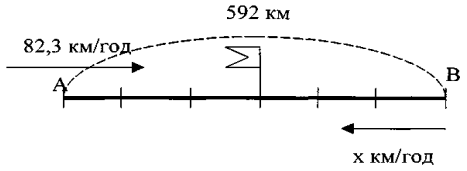
a) *урок засвоєння нових знань з теми: «Паралелограм».*
b) *комбінований урок з теми: «Системи лінійних рівнянь»*

c) *урок формування умінь та навичок з теми: «Додавання дробів з різними знаменниками»*

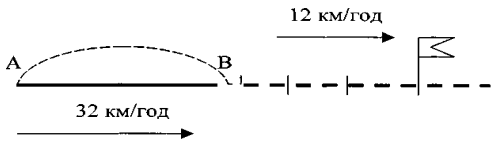
d) *урок застосування знань, навичок та умінь з теми: «Дробово-раціональні рівняння»*

11. Для графічно представлених залежностей між об'єктами умови сформулюйте задачу?

a)



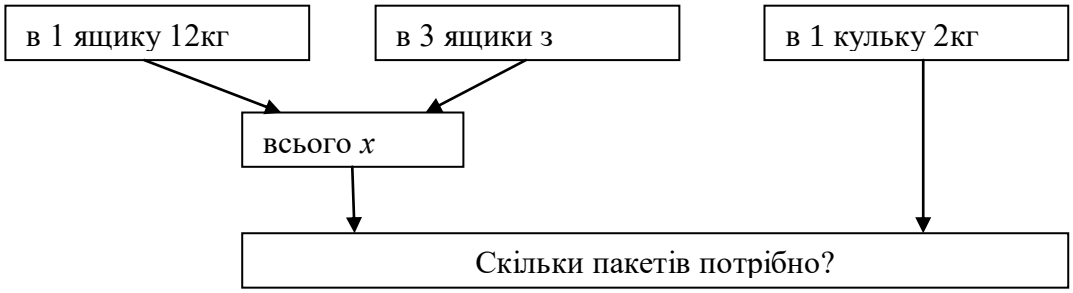
b)



c)

	Шлях	***Час***	***Швидкість***
Автобус	*60км*	$V_{автобус}$	$t_{автобус}$ *на 0,5год більше*
Легковий автомобіль	*60км*	$V_{автомоб}$ *на 20 км/год більше*	$t_{автомоб}$

d)



12. Для запропонованих задач сформулюйте систему допоміжних запитаннями для учнів, відповідаючи на які вони зможуть скласти рівняння до задачі.

a) *Сплав олова і міді, маса якого 16 кг, містить 55 % олово. Скільки кілограмів олова потрібно додати в сплав, щоб підвищити вміст олова в сплаві до 60%?*

b) *Довжина прямокутника на 18 м більше його ширини. Якщо довжину прямокутника зменшити на 8 м, а ширину збільшити на 7 м, то його площа збільшиться на 40 м . Знайдіть площу даного прямокутника.*

c) *З М в N із швидкістю 68 км/год відправився пасажирський поїзд, а через 6 хв, вслід за ним вийшов електропоїзд, що проходить за одну годину 85км. На якій відстані від станції N електропоїзд наздожене пасажирський, якщо довжина перегону MN рівна 40 км*
d) *В одному баку 940 л води, а в іншому — 480 л. З першого виливають за годину в 3-разу більше води, ніж з другого. Через 5 год в першому баку залишається на 40 л менше води, ніж в другому. Скільки літрів води виливається з кожного бака за 1 год?*

13. «Перекладіть» умову та вимогу задач на мову «векторів» для подальшого їх розв'язування векторним методом:

a) *У рівнобедреному трикутнику медіани проведені до бічних сторін – рівні.*
b) *У трикутнику ABC відрізок BK ділить сторону AC на відрізки, які відносяться як 3:5. У якому відношенні ділить цей відрізок медіану проведену з вершини A?*
c) *Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції паралельний основам?*

14. Опишіть етапи роботи над розв'язуванням задачі методом математичного моделювання:

a) *Теплохід вийшов з порту H у порт P з швидкістю 32 км/год. На відстані 216 км від порту H він потрапив у шторм і повинен був зменшити швидкість на 5 км/год. У результаті теплохід прибув у порт H із запізненням на 25 хв. Яка відстань між портами H і P?*
b) *Поїзд затримався у дорозі на 12 хв, а потім на відстані 60 км надолужив згаяний час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Визначити початкову швидкість поїзда.*

15. Вкажіть дидактичну мету, що досягається на уроці завдяки реалізації етапу:

a) *«актуалізація опорних знань»;*
b) *«мотивація навчальної діяльності»;*
c) *«повідомлення теми, мети та завдань уроку»;*
d) *«підсумок уроку».*

16. Вкажіть етапи уроку:

a) *Вивчення нового матеріалу.*
b) *Формування умінь і навичок*
c) *Комбінованого уроку.*
d) *Узагальнення та систематизації знань.*

17. Вкажіть послідовність вивчення навчального матеріалу під час вивчення:

a) *Дробових чисел у 5-6 класах.*
b) *Тотожних перетворень виразів у 7 класі.*
c) *Квадратних коренів та їх властивостей у 8 класі.*

18. Вкажіть послідовність етапів вивчення властивостей функції:

a) *Лінійної функції.*
b) *Функції* $y = \sqrt{x}$.
c) *Квадратичної функції.*

4.6. Методика навчання математики в школі. Зразки оформлення відповіді

Завдання 1. Перевірте, чи правильно виконана дія ділення поняття. Якщо так, за якою основою виконано ділення?

а) трикутники можуть бути правильні, гострокутні, тупокутні, рівносторонні;

Зразок відповіді:

Не виконується вимога, про те, що ділення повинно мати одну основу. Основою служать дві ознаки: градусна міра кутів та довжина сторін.

Завдання 2. Представте схематично у вигляді схеми-діаграми Ейлера-Венна співвідношення між обсягами наступних понять:

а) прямі, паралельні прямі, перпендикулярні прямі;

Зразок відповіді:

Завдання 3. Вкажіть характер помилок допущений в означені понять та спосіб виправлення учня, що сформулював таке означення:

а) Променем називається пряма обмежена з однієї сторони.

Зразок відповіді

Неправильно вказане родове поняття. Замість поняття «пряма» потрібно використати «частина прямої». Для виправлення учня можна використати прийом зіставлення властивостей понять, що заперечують одне одному: промінь – це обмежена з однієї сторони лінія, а пряма – необмежена

Завдання 4. Виконайте логіко-математичний аналіз означення поняття (вкажіть термін, рід, істотні ознаки)

а) Дріб у якого чисельник більший за знаменник або дорівнює йому називається неправильним

Зразок відповіді

Термін	***Рід***	***Видові ознаки***
Неправильний дріб	Дріб	1. Чисельник більший за знаменник 2. Чисельник дорівнює знаменнику

Означення містить дві видові ознаки – складене. Властивості в означенні сполучені “або” – диз’юнктивне означення.

Завдання 5. Сформулюйте твердження використовуючи слова необхідно і достатньо:

a) *Середнє арифметичне будь-яких двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного;*

b) *Чотирикутник у якого протилежні сторони попарно рівні – паралелограм.*

Зразок відповіді

а) Щоб середнє арифметичне двох чисел було не менше від їх середнього геометричного достатньо, щоб ці числа були додатними.

б) Щоб чотирикутник був паралелограмом необхідно і достатньо, щоб його протилежні сторони були рівні

Завдання 6. Виконайте логіко-математичний аналіз теореми (вкажіть роз'яснювальну частину, умову, вимогу, проста чи складена). Сформулюйте її в імплікативній формі.

а) Вертикальні кути рівні

Зразок відповіді

У теоремі роз'яснювальна частина – «пари кутів», умовою *A* є судження «кути є вертикальні», вимога *B* – «кути є рівні». Вимога і умова містять по одному судженню, отже теорема проста.

Імплікативна форма: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні».

4.7. Елементарна математика. Основні факти

1. Текстові арифметичні задачі.
2. Лінійні рівняння та їхні системи. Лінійні рівняння з параметрами.
3. Квадратні рівняння. Квадратні рівняння з параметрами. Рівняння вищих степенів.
4. Дробово-раціональні рівняння з параметрами.
5. Лінійні, квадратичні, цілі раціональні, дробово-раціональні нерівності з параметрами.
6. Рівняння та нерівності з модулями, з параметрами.
7. Перетворення ірраціональних виразів. Ірраціональні рівняння та нерівності.
8. Доведення тригонометричних тотожностей та рівностей. Обчислення значень тригонометричних функцій.
9. Тотожні перетворення обернених тригонометричних функцій. Обчислення значень обернених тригонометричних функцій.
10. Тригонометричні рівняння та системи рівнянь. Рівняння з параметрами.
11. Тригонометричні нерівності.
12. Рівняння і нерівності з оберненими тригонометричними функціями.
13. Тотожні перетворення показникових та логарифмічних виразів.
14. Розв'язування показникових рівнянь та нерівностей. Рівняння з параметрами.
15. Розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей. Рівняння з параметрами.
16. Розв'язування систем показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей.
17. Доведення нерівностей.
18. Перетворення графіків функцій.
19. Метричні співвідношення у трикутнику. Чудові точки та лінії трикутника.
20. Метричні співвідношення у чотирикутнику. Розв'язування задач.
21. Коло, дотична, хорда, вписані та центральні кути, їхні властивості. Розв'язування задач.
22. Обчислення площ трикутника, чотирикутника, многокутника, круга та його частин.
23. Основні побудови. Розв'язування задач на побудову методом геометричних місць, геометричних перетворень (осьова та центральна симетрії, поворот, перенесення, гомотетія, перетворення подібності).
24. Розв'язування задач на мимобіжні прямі, паралельність і перпендикулярність прямих та площин у просторі.
25. Побудова перерізів многогранників.
26. Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь та об'ємів многогранників.
27. Задачі на обчислення площ поверхонь та об'ємів круглих тіл, їх комбінацій з многогранниками.
28. Розв'язування геометричних задач координатним та векторним методами.

4.8. Елементарна математика. Зразки завдань з елементарної математики (алгебра)

1. У трьох гаях 4160 беріз. Скільки беріз у кожному гаю, якщо в першому було в 3 рази більше, ніж у другому, а в третьому стільки, скільки в перших двох разом?
2. Один кусок дроту на 54 м довший за другий. Після того, як від кожного з кусків відрізали по 12 м, другий кусок став у 4 рази коротший за перший. Знайти довжину кожного куска дроту.
3. Котра тепер година, коли частина доби, що залишилась, у 2 рази менша від тієї, що минула?
4. За 3 м шерстяної і 4 м шовкової тканини заплатили 540 грн. Один метр шерстяної тканини коштував у 2 рази дорожче, ніж один метр шовкової. Скільки коштував 1 м шовкової і 1 м шерстяної тканини?
5. На одну вантажну машину навантажили 1104 кг картоплі, на другу – 864 кг, причому на першу машину було навантажено на 5 мішків картоплі більше, ніж на другу. Скільки мішків картоплі навантажили на кожну машину, коли відомо, що всі мішки були однакові?
6. Для 105 корів заготовили сіна на 120 днів. На скільки днів вистачить цього запасу для 140 корів?
7. На пароплаві зроблено запас харчів для 48 чоловік на 25 днів. Насправді виявилось на 12 чоловік більше. На скільки днів вистачить заготовлених харчів?

8. Для виготовлення бронзи на 20 кг міді беруть 3 кг цинку і 2 кг олова. Скільки треба взяти кожного з цих металів, щоб виготовити 15 зливків бронзи масою кожний 45 кг?
9. У місті три середніх школи. Кількість учнів першої школи становить $\frac{1}{4}$ усіх учнів цих трьох шкіл; у другій школі учнів у $1\frac{2}{5}$ рази більше, ніж у першій; у третій – на 240 учнів більше, ніж у другій. Скільки всього учнів у трьох школах?
10. Весь шлях від міста *А* до міста *Б* автомобіль пройшов за три дні. За перший день автомобіль пройшов $\frac{7}{20}$ усього шляху, за другий $\frac{8}{13}$ шляху, що залишався, а за третій день автомобіль пройшов на 72 км менше, ніж за перший день. Яка відстань між містами *А* і *Б* ?
11. Липовий цвіт при сушінні втрачає 74% своєї ваги. Скільки вийде сухого липового цвіту з 200 кг свіжого?
12. При варінні м'ясо втрачає близько 35% своєї ваги. Скільки треба взяти сирого м'яса, щоб мати 800 г вареного?
13. До зниження цін кілограм хліба коштував 1 грн. 20 коп., а після зниження – 1 грн. 05 коп. На скільки відсотків знижено ціну на хліб?
14. Число зменшене на 25%. На скільки відсотків треба збільшити нове число, щоб дістати дане число?
15. Перша бригада лісорубів береться вирубати лісову ділянку за 6 днів, друга – за 7 днів, а третя – за час, удвоє більший, ніж друга бригада. Після того, як перша і друга бригади попрацювали разом 2 дні, до них приєдналася третя бригада. Через скільки днів усі 3 бригади закінчили роботу?
16. Басейн наповнюється двома трубами. Спочатку відкрили першу трубу, а через 2 години 15 хвилин, коли наповнилась половина басейну, відкрили другу трубу. Через 1,5 год спільної роботи басейн наповнився. Визначити місткість басейну, якщо через другу трубу вливалось 400 відер за годину.
17. О 4 год 20 хв ранку з Києва до Одеси вийшов товарний поїзд з середньою швидкістю $31\frac{1}{5}$ км за годину. Через деякий час назустріч йому з Одеси вийшов поштовий поїзд, швидкість якого в $1\frac{17}{39}$ рази більша від швидкості товарного, і зустрівся з товарним поїздом через $6\frac{1}{2}$ год після свого виходу. О котрій годині вийшов з Одеси поштовий поїзд, якщо відстань між Києвом і Одесою 663 км?
18. З двох міст, відстань між якими 34 км, вийшли одночасно назустріч один одному два туристи; один з них проходить за годину на 1,5 км більше, ніж другий. Через $4\frac{1}{4}$ год туристи зустрілись. Скільки кілометрів за годину проходив кожний з туристів?
19. Моторний човен пройшов 207 км за течією річки за $13\frac{1}{2}$ год, витративши $\frac{1}{9}$ частину цього часу на зупинки. Швидкість течії річки $1\frac{3}{4}$ км за годину. Скільки кілометрів може пройти цей човен у стоячій воді за $2\frac{1}{2}$ год?
20. Сплавлено два зливки золота: один 900-ї проби масою 320 г і другий 540-ї проби масою 160 г. Визначити пробу сплаву.
21. У діжку налито 70 л води, температура якої дорівнює 4^0. Скільки літрів води з температурою 80^0 треба долити в діжку, щоб температура води в ній піднялась до 24^0?
22. Визначити значення параметра *a*, при якому рівняння має безліч розв'язків: $(a^2-1)x=a^2+2a-3$.
23. Визначити значення параметра *a*, при якому рівняння не має розв'язків: $(a-3)(a-4)x=a^2-16$.

24. При якому значенні m система $\begin{cases} mx+5y=-10 \\ 5x+my=10 \end{cases}$ не має розв'язку?

25. При якому m система $\begin{cases} 4x+my=8 \\ mx+9y=12 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

26. При якому значенні m рівняння $x^2+(m-2)x-11=0$ має розв'язок $x=-2$?

27. При якому значенні параметра m сума коренів рівняння $(2m+1)x^2+2mx-1=0$ дорівнює 1?

28. Обчислити $x_1^3+x_2^3$, якщо x_1 і x_2 – корені рівняння $10x^2+3x-4=0$.

29. Визначити значення параметра a, при якому рівняння має один розв'язок: $(x+a)^2+4x^2-4x+1=0$.

30. При скількох цілих значеннях m добуток коренів рівняння $2x^2+9x+m/2-1=0$ є в проміжку (3;4)?

31. Розв'язати нерівності:

$x^2-10x+21\ge 0$; $(x-3)^2(2-x)\ge 0$; $(x-1)^3(3-x)(x-4)^2\ge 0$; $x^4-10x^2+9\le 0$;

$\frac{x+9}{x-1}\le 0$; $\frac{7-x}{x+5}>0$; $\frac{(x-4)^2}{2-x}\ge 0$; $\frac{x-2-x^2}{x-9}\ge 0$; $\frac{x^2-3x+3}{x+8}\le 0$.

32. Розв'язати нерівності: $a^2+ax<1-x$; $a(3x-1)>3x-2$.

33. При якому значенні параметра a нерівність $(2a^2-5a)x<a^2-4a+1$ не має розв'язку?

34. Розв'язати рівняння: $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14)=1204$.

35. Визначити кількість цілих значень параметра $\boldsymbol{a}$, при яких квадратне рівняння $3x^2-2ax+a=0$ не має дійсних коренів.

36. Визначити кількість цілих значень параметра $\boldsymbol{a}$, що є в проміжку (-5;5), при яких квадратне рівняння $2x^2-(a+2)x+2=0$ має два різні корені.

37. При якому значенні $\boldsymbol{a}$ квадратне рівняння $ax^2-(1-2a)x+a-2=0$ має два однакові корені?

38. Обчислити середнє арифметичне цілих значень параметра $\boldsymbol{a}$, при яких рівняння $(a-12)x^2+(2a-24)x+2=0$ не має дійсних коренів.

39. При якому найменшому цілому значенні параметра $\boldsymbol{a}$ корені рівняння $4x^2-(3a-1)x-a-1=0$ є в проміжку [-3;2]?

40. Розв'язати рівняння: $\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-b}{x-a}=2.$

41. Розв'язати рівняння: а) $|2x-1|=5$; б) $3|x-3|+2|3-x|=6$; в) $|4-3x|+0{,}2=x$; г) $|x-1|+|x+1|=2$; д) $|x|+|x+2|+|2-x|=x+1$.

42. Визначити суму розв'язків рівняння: $||x+2|-1|=4$.

43. При якому значенні параметра $\boldsymbol{a}$ рівняння $||x+1|+a|=4$ має три розв'язки?

44. При якому значенні параметра $\boldsymbol{a}$ рівняння $||x-9|+a|=17$ має один розв'язок?

45. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності: $|x+2|\le 4$.

46. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності в проміжку [-5;5]: $|2x-1|\ge 3$.

47. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності: $|2-3x|-x\le 8$.

48. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності:

а) $(x+4)(3-x)|x-4|\ge 0$; б) $|x-1|(x+5)(x-3)<0$.

49. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності: $|x-1|>|2x+3|$.

50. Винести множник з-під знака кореня: $\sqrt[4]{-a^9}$; $\sqrt{a^3b^{10}}$.

51. Внести множник під знак кореня: $a\sqrt{a-3}$; $bc\sqrt{c}$.

52. Спростити вираз: $\sqrt{91-40\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

53. Розв'язати рівняння: а) $\sqrt{x^2+3x-3}=2x-3$; б) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$; в) $(x+2)(x-5)+3\sqrt{x(x-3)}=0$; г) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$; д) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$; е) $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}-\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}+33=0$.

54. Розв'язати нерівності: а) $\sqrt{x^2-5x+6}<2x-3$; б) $\sqrt{x^2+5x-6}>x+2$.

55. Довести нерівність: $(x+y)^4\le 8(x^4+y^4)$.

56. Побудувати графік функції: $y=|x^2-8|x|+12|$.

57. Обчислити: $\cos 99^\circ+\cos 81^\circ$.

58. Обчислити: $\dfrac{5\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$, якщо $\sin 2\alpha=0{,}7$.

59. Обчислити: $21ctg\alpha$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

60. Довести тотожність: $tg\alpha+tg(\alpha+60^\circ)+tg(\alpha-60^\circ)=3tg3\alpha$.

61. Довести тотожність: $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}=1$, якщо $\cos 4\alpha=1$.

62. Довести рівність: $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$.

63. Обчислити найменше значення функції: $y=\cos(3x)+2$.

64. Визначити найменший додатний період функції: а) $y=\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)-1$;

б) $y=\sin(\pi x)\cos(\pi x)$; в) $y=\left(\cos^2(\pi x)-\sin^2(\pi x)\right)\sin(2\pi x)$.

65. Побудувати графіки функцій: а) $y=\cos|x|$; б) $y=|\cos x|$; в) $y=|\cos|x||$; г) $y=\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)$.

66. Обчислити: а) $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$; б) $tg\left(\arccos\left(-\dfrac{2}{\pi}\right)\right)$; в) $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

67. Виразити $\arcsin\dfrac{12}{13}$ через арккотангенс.

68. Розв'язати рівняння:

а) $2\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$;

б) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$;

в) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2$;

г) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5$;

д) $\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}=0$;

е) $ctg(\pi\sin 3x)=0$.

69. Визначити кількість коренів рівняння на заданому проміжку:

$3\sin^2 x-4\cos x\sin x+5\cos^2 x=2,\quad [-\pi;\pi]$.

70. Розв'язати системи рівнянь: а) $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ \cos x-\cos y=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x\cdot\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

71. Розв'язати нерівності: а) $\sin x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\cos^2 x+5\sin x-4\le 0$;

в) $3\sin^2 x+7|\cos x|-3<0$; г) $\dfrac{x^2-5x+9}{\sqrt{\cos 2x}}\le 0$.

72. Розв'язати рівняння: а) $\pi-4arcctg(x^2+x-1)=0$; б) $2\arcsin(\dfrac{2x+1}{2})=\dfrac{\pi}{3}$.

73. Розв'язати нерівності: а) $\arcsin(x-1)>\dfrac{1}{2}$; б) $\arccos\left(x^2-2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>\dfrac{\pi}{4}$;

в) $4arctg\,(x^2-3x+3)\ge\pi$.

74. Розв'язати рівняння: а) $a\sin 2x=1$; б) $\cos\sqrt{x-1}=2a$.

75. Обчислити: а) $216^{\log_6 2}+6^{2-2\log_6 2}$; б) $(\log_3 8)(\log_{17} 3)(\log_4 17)$.

76. Обчислити $\log_{\frac{a}{b}} x$, якщо $\log_a x=2,\quad \log_b x=4$.

77. Побудувати графіки функцій: а) $y=2^{|x|}$; б) $y=|\log_2 x|$; в) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right|$.

78. Розв'язати рівняння: а) $4^{2x-3}-3\cdot 4^{x-2}-1=0$; б) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$; в) $9^x+4^x=2{,}5\cdot 6^x$;

г) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6$.

79. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2^x+2\cdot 3^{x+y}=56, \\ 3\cdot 2^x+3^{x+y+1}=87. \end{cases}$

80. Розв'язати нерівності: а) $2^{\frac{x+1}{x-2}}\ge 4$; б) $4^x-2\cdot 5^{2x}<10^x$; в) $5^x+25^x-30\le 0$; г) $2^{2x+5}<3^{x+2}$.

81. Розв'язати рівняння: а) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$; б) $\log_{11}\log_3\log_2\left(2(1-x)^{-1}\right)=0$;

в) $\log_x(x^2-5x+10)=2$; г) $x^{\lg^2 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10^{-1}}$.

82. Розв'язати нерівності: а) $\log_3(x^2-5x+6)<0$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\dfrac{1+2x}{1+x}\right)>0$;

в) $\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\sqrt{3}} x<6$; г) $\log_x\dfrac{4x-2}{3}\ge 1$.

83. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^y=2, \\ (2x)^{y^2}=64 \quad (x>0). \end{cases}$

84. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)}=1, \\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8. \end{cases}$

85. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

4.9. Елементарна математика. Зразки завдань з елементарної математики (геометрія)

1. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 і 12. Обчислити довжину більшого катета трикутника.
2. Довжина бічної сторони рівнобедреного трикутника дорівнює 5, а основи – 6. Знайти радіус вписаного кола.

3. У трикутнику ABC $AB=5$, $BC=7$ і $AC=8$. У даний трикутник вписано коло і K – точка дотику кола і AC. Знайти CK.

4. Усередині правильного трикутника взято точку, яка віддалена від його сторін на 12, 17 і 10. Обчислити висоту трикутника.

5. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона відповідно дорівнюють 5 і 20. Знайти бісектрису кута при основі трикутника.

6. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 6 і 8. Обчислити довжину третьої сторони трикутника, якщо довжина медіани, опущеної на неї, дорівнює $\sqrt{46}$.

7. Знайти площу рівнобедреного трикутника, якщо висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 12, а інша висота – 9.

8. Периметр паралелограма дорівнює 30. Знайти його більшу сторону, якщо висоти паралелограма відносяться як 1:2.

9. Перпендикуляр, опущений із вершини паралелограма на його діагональ ділить цю діагональ на відрізки, що дорівнюють 6 і 15. Різниця між довжинами сторін паралелограма дорівнює 7. Знайти сторони паралелограма і його діагоналі.

10. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 і 19, а сторони відносяться як 2:3. Знайти сторони паралелограма.

11. У рівнобічній трапеції діагональ ділить її гострий кут навпіл. Обчислити середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 27, а більша основа – 9.

12. Пряма, паралельна до основ трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей. Обчислити довжину відрізка прямої між сторонами трапеції, якщо довжини основ трапеції дорівнюють 3 і 1.

13. У рівнобічній трапеції діагональ ділить її тупий кут навпіл. Обчислити середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 54, а менша основа – 9.

14. Два кола дотикаються зовні. Відстань від точки дотику кіл до їхньої спільної дотичної дорівнює 3,2. Обчислити радіус більшого кола, якщо радіус меншого – 2.

15. Основи трапеції дорівнюють 10 і 24, а бічні сторони 15 і 13. Знайти площу трапеції.

16. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у відповідних точках M і N. Знайти довжину відрізка CN, якщо AC:CB=2:3, BM=12.

17. Один з катетів прямокутного трикутника ABC дорівнює 6, а гострий кут, прилеглий до цього катета, дорівнює 30°. Через вершину прямого кута C провдено відрізок CD, перпендикулярний до площини цього трикутника, $CD = 4$. Визначити відстань від точки D до прямої AB.

18. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 1200, а його основа – 60. Точка простору віддалена від кожної сторони трикутника на 39. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

19. Однакові рівнобедрені трикутники ABC і BCD мають спільну сторону BC, а їхні площини утворюють кут 120°. Знайти бічні сторони трикутників ABC і BCD, якщо їхні основи дорівнюють 3, а відстань між точками A і D дорівнює $\sqrt{15}$.

20. У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом α. Обчислити площу повної поверхні, якщо площа основи дорівнює S.

21. В основі прямої призми лежить ромб з більшою діагоналлю l. Через цю діагональ і вершину верхньої основи призми проведено площину, яка перетинає дві суміжні бічні грані призми по прямих, що утворюють між собою кут α, а з площиною основи кут β. Знайти площу бічної поверхні.

22. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані кут β. Знайти об'єм паралелепіпеда.

23. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α. Визначити повну поверхню піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічної грані дорівнює d.

24. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, якщо площина, що проходить через основу a і середину її висоти нахилена до основи під кутом φ.

25. Хорда основи циліндра дорівнює a і стягує дугу кола основи величиною α. Площа перерізу, проведеного через цю хорду перпендикулярно до площини основи, дорівнює S. Знайти площу повної поверхні циліндра.

26. У циліндрі, паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді b, яку видно з центра верхньої основи під кутом φ. Діагоналі перерізу утворюють між собою кут α. Знайти об'єм циліндра.

27. Відрізок, який сполучає центр основи конуса з серединою твірної, нахилений до площини основи під кутом α. Довжина цього відрізка дорівнює m. Знайти повну поверхню конуса.

28. Кут між твірною і основою конуса дорівнює α, хорду основи видно із його вершини під кутом β. Знайти об'єм конуса, якщо довжина хорди дорівнює m.

29. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань нахилена до основи під кутом α. Знайти об'єм вписаної кулі.

30. Конус вписано в кулю, радіус якої дорівнює R. Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо кут при вершині його осьового перерізу дорівнює α.

4.10. Методика навчання математики в школі. Рекомендована література

1. Александрова Э.И. Концепция курса математики для 5–6 классов по системе Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова" //Практика розвивального навчання. Збірник статей. – Харків: 2004. – С.42-59.
2. Алексюк А.М. Загальні методи навчання в школі. К., Радянська школа, 1981.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Навч. Посібник. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
4. Бевз Г.П. Методика розв'язування алгебраїчних задач. – К.: Радянська школа, 1975. – 240 с.
5. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
6. Бурда М.І. Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах. – К.: Радянська школа, 1986. – 112 с.
7. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти //Педагогіка і психологія. – 1996. – №1. – С. 40-45.
8. Возняк Г.М., Маланюк М.П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя. – К.: Рад. шк., 1989. – 221 с.
9. Глейзер Г.И. История математики в школе (7-8 класи). – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

10. Державна національна програма „Освіта” України XXI століття. Заходи щодо реалізації Державної національної програми, затвердженою постановою Кабінету Міністрів України від 03.11.1993 р. № 96. / Освіта. – 1993. - № 44-46.
11. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. М., Педагогика, 1972.
12. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
13. Коба В.І., Хмура О.О. Позакласна робота з математики. К., Радянська школа, 1968.
14. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. В 2 ч.- М., 1977.
15. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. М., Просвещение, 1968.
16. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994.
17. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения в школе.-М., 1977.
18. Математика в поняттях, означеннях і термінах: В 2 т / О.В.Мантуров, Ю.К.Солнцев, Ю.І. Сорокін, М.Г. Федін. – К.: Рад. шк., 1986. – Т.1: А–Л. – 383 с.
19. Методика викладання математики: Наук.-метод. Зб./За редакцією І.Є.Шиманського, Г.П.Бевза.-К.,1964-1983.-Вип.1-14.
20. Методика викладання математики. Упорядники Р.С.Черкасов, А.А. Столяр. Харків, Основа, 1992.
21. Методика обучения математики. Під ред. А.А.Столяра. Минск, Высшая школа, 1981.
22. Методика преподавания математики в средней школе. Учебное пособие. Под ред. В.И.Мишина. М., Просвещение, 1987.
23. Пиаже Ж. и др. Преподавание математики. Пер. с франц. Пособие для учителей. М., Учпедгиз, 1960.
24. Практика розвивального навчання. Збірник статей. – Харків, 2004. – 192 с.
25. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: В двух частях. – М.: Наука, 1991.
26. Програма GRAN 1 для вивчення математики в школі й вузі : Методичні рекомендації /Укл. М.І.Жалдак, Ю.В. Горошко. – К.: КДПІ, 1992. – 48 с.
27. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Методичний посібник для вчителів математики, учнів та студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. – Житомир, 1999. – 134 с.
28. Семенець С.П. Про вивчення функцій у класах фізико-математичного профілю //Математика в школі, 2005. – №7. – С. 33-35
29. Семенець С.П. Особливості лабораторних та практичних форм розвивального навчання в системі методичної підготовки майбутніх учителів математики //Вісник ЖДУ, 2006. – №.28. – С. 23-27
30. Семенець С.П. Особливості лекційної форми розвивального навчання в системі методичної підготовки майбутніх учителів математики //Вісник Луганського національного педагогічно-го університету імені Тараса Шевченка, 2006 – №16 (111). – С. 46-51
31. Скафа О.І. Сучасні технології навчання та місце евристичної діяльності в них //Наука і сучасність. Збірник наукових праць Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова. – К.: Логос, 2001. – Том XXIX. –С. 141-146.
32. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. К., Радянська школа, 1982.
33. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. К., Зодіак-Еко, 2000.
34. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
35. Столяр А.А. Педагогика математики. Минск, Вышэйшая школа, 1986.
36. Тадеєв В.О. Розв’язування планіметричних задач векторно-координатним методом: Навч. посібник для учнів. (Бібліотечка заочної математичної школи). – Тернопіль, 1998.

37. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: Монографія. – Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002.– 400с.
38. Хмара Т.М. Навчання учнів математичної мови: Методичний посібник. – К.: Рад. шк., 1985. – 95 с.
39. Урок математики в школі. За ред. Г.П. Бевза. К., Радянська школа, 1977.
40. Унт И. Дифференциация и индивидуализация обучения в школе. М. Просвещение, 1991.
41. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача.- М., 1982.
42. Фурман А.В. Проблемні ситуації в навчанні. Книга для вчителя. К., Радянська школа, 1991.

4.11. Елементарна математика. Рекомендована література

Основна:

1. Практикум з розв'язування задач з математики: навч. посібник для студ. фіз.-мат. фак-тів пед. ін-тів // За ред. В.І. Михайловського. – К.: Вища школа, 1989. – 423 с.
2. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач. – М.: Просвещение, 1979. – 236 с.
3. Каплан Я.Л. Рівняння. – К.: Радянська школа, 1968. – 406 с.
4. Шарова Л.И. Уравнение и неравенства. – К.: Вища школа, 1981. – 280 с.
5. Єрмолаєв Ф.Т. Збірник задач з арифметики. – К.: Радянська школа, 1960. – 192 с.
6. Пономарьов С.О., Сирнєв М.І. Збірник задач і вправ з арифметики. – К.: Радянська школа, 1969. – 255 с.
7. Добош У.П., Комарницька Л.І. Рівняння і нерівності з параметрами: Методичний посібник / Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2007. – 87 с.
8. Барановська Г.Г., Ясінський В.В. Практикум з математики. Тригонометрія. – К.: НТУУ «КПІ», 1999. – 121 с.
9. Болтнянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М., «Наука». 1974. – 576 с.
10. Галь Ю. М., Золота О. А. Елементарна математика (геометрія). Збірник задач. Дрогобич: РВДДПУ, 2015. – 55 ст.
11. Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Геометрія. Л., «ВНТЛ». 1997. – 80 с.

Додаткова:

12. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики. – К.: Вища школа, 1988. – 328 с.
13. Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др. Под ред. М.И.Сканави. Сборник задач по математике для поступающих во втузы – 6-е изд., – М.: Высшая школа, 1992. – 528 с.
14. Добош У.П., Комарницька Л.І. Рівняння і нерівності з оберненими тригонометричними функціями: Навчально-методичний посібник. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2009. – 44 с.
15. Добош У., Комарницька Л. Тригонометричні рівняння з параметрами: Навчально-методичний посібник. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2011. – 35 с.
16. Ігнатенко М.Я. Тригонометричні рівняння з параметрами // Математика в школі. – 2000. – № 3. – С.18-21.
17. Ясінський В.В. Тригонометрія (посібник для абітурієнтів НТУУ КПІ). – К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2002. – 50 с.
18. Ясінський В.В., Барановська Г.Г., Брановицька С.В. Тригонометрія. Київ, 2005. – 105 с.
19. Литвиненко В.М., Мордюкович А.Г. Практикум по елементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. – М., 1991. – 352 с.
20. Ломонос Л.М., Муранова Н.П., Гадалін С.І. Тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи. Навчальний посібник. Національний авіаційний університет. – 2006. – 148 с.
21. Збірник типових конкурсних тестових задач з математики. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. Ів.Франка, 2007. – 134 с.

Перелік питань до кваліфікаційного екзамену
для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
з інформатики та методики її викладання

1. Методика навчання інформатики як наука і як навчальний предмет у вищому педагогічному навчальному закладі. Завдання курсу методики навчання інформатики.
2. Інформатика як наука і як навчальний предмет у загальноосвітній школі.
3. Методична система навчання інформатики в середній загальноосвітній школі. Цілі навчання інформатики в середній загальноосвітній школі.
4. Методична система навчання комп'ютерної грамотності та її складові. Інформаційна культура учнів та її компоненти.
5. Становлення, особливості та перспективи розвитку шкільного курсу інформатики. Особливості шкільного курсу інформатики.
6. Стандарт шкільної освіти з інформатики. Особливості сучасної шкільної програми з інформатики.
7. Принципи навчання інформатики. Методи та засоби навчання.
8. Функціональне призначення та обладнання шкільного кабінету інформатики. Форми організації навчальної діяльності учнів.
9. Урок інформатики. Типологія уроків. Дидактичні особливості уроку інформатики.
10. Застосування інтерактивних методик на уроках інформатики. Підготовка вчителя до уроку інформатики. Конспект уроку.
11. Позакласна робота з інформатики. Диференційоване навчання інформатики.
12. Види та форми контролю за навчальною діяльністю учнів. Критерії оцінювання рівня навчальних досягнень учнів з інформатики.
13. Прикладне програмне забезпечення загального призначення. Графічний редактор. Текстовий редактор. Табличний процесор.
14. Навчання інноваційних інформаційно-комунікаційних технологій. Мобільні технології. Хмарні технології.
15. Психолого-дидактичний аналіз помилок учнів при навчанні інформатики.
16. Методика формування поняття інформації. Інформація і повідомлення.
17. Методика використання комп’ютерної техніки у навчанні, освіті та наукових дослідженнях.
18. Методика вивчення роботи з таблицями і структурою документу в текстовому процесорі Word:
19. Методика вивчення роботи з електронними таблицями. Клас задач, що розв’язуються за допомогою ЕТ.
20. Методика створення, редагування та показу матеріалів для презентацій. Призначення та функціональні можливості Power Point 7.0.

Завдання для програмної реалізації

1. Скласти фрагмент програми для обчислення детермінанту матриці 4-го порядку.
2. Скласти фрагмент програми для сортування одновимірного масиву.
3. Описати процедуру знаходження максимального та мінімального значення серед елементів таблиці розмірності n x n.
4. Скласти фрагмент програми, який перемножує дві квадратні матриці розмірності n.
5. Скласти фрагмент програми для обчислення числа комбінацій C_n^m.
6. Скласти програму, яка міняє місцями перше і друге слово в реченні.
7. Написати фрагмент програми, який вилучає із заданого рядка символ “a”.
8. Написати процедуру знаходження скалярного добутку двох векторів.
9. Написати фрагмент програми, яка міняє місцями перший і останній рядок таблиці.
10. Написати фрагмент програми, який знаходить максимальнен значення кожного рядка матриці.
11. Скласти фрагмент програми для знаходження суми додатніх елементів кожного стовпця матриці.
12. Скласти фрагмент програми для знаходження добутку діагональних елементів матриці.
13. Скласти фрагмент програми для знаходження кількості елементів в одновимірному масиві з проміжку [a,b].
14. Скласти фрагмент програми , який міняє максимальний і мінімальний елементи місцями в одновимірному масиві.
15. Скласти фрагмент програми для підрахунку кількості слів у реченні.
16. Скласти фрагмент програми для знаходження суми наддіагональних елементів матриці.
17. Скласти фрагмент програми для підрахунку кількості максимальних елементів в одновимірному масиві.
18. Скласти фрагмент програми, який записує текст у зворотньому порядку.
19. Скласти фрагмент програми для знаходження добутку всіх парних елементів двохвимірного масиву.
20. Скласти фрагмент програми , який визначає чи знаходиться максимальний елемент над головною діагоналлю.
21. Скласти фрагмент програми , який замінює нульові елементи добутком максимального і мінімального елементів.
22. Скласти фрагмент програми для підрахунку кількості невід’мних елементів матриці.
23. Скласти фрагмент програми для підрахунку суми перших трьох максимальних елементів матриці.
24. Скласти фрагмент програми для підрахунку добутку перших трьох мінімальних елементів матриці.
25. Скласти фрагмент програми, який заміняє мінімальні елементи нулями в матриці.
26. Скласти фрагмент програми для пошуку найдовшого слова у реченні.
27. Скласти фрагмент програми для транспонування матриці.
28. Скласти фрагмент програми для підрахунку добутку елементів кожного стовпця матриці.
29. Скласти фрагмент програми для підрахунку суми елементів кожного рядка матриці.